高校生が演習で学ぶ
特殊相対性理論

服部修平

2024 年 1 月 4 日

1 光速度不変の原理

1.1 Michelson-Morley の実験

特殊相対性理論は、Einstein によって 1905 年に第 1 論文が発表された、それまでの物理学を根底から覆す画期的な理論である。

この理論は、光の本性に関する研究から生み出されたと言うことができる。出発点とされるのは、**Michelson-Morley の実験**と呼ばれる、有名な実験である。

エーテル

光は波である。

このことは、19 世紀はじめに **Young の実験**によって実験的に示され、1864 年に発表された Maxwell 方程式によって理論的に示された。Maxwell 方程式からの帰結によれば、光とは電場と磁場が波として伝わる現象である。

波には媒質が存在しなければならない。したがって光にも媒質があるはずである。19 世紀の時点では、光の媒質は、**エーテル**と呼ばれ、物質の一種と考えられていた。つまり、電場・磁場はエーテルの変位を表す量なのだということになる。光の性質や他の経験から、エーテルは次のような性質を持つ物質だと考えられた。

- 光は宇宙のどこでも伝わる。$\longrightarrow$ エーテルは全宇宙空間を満たしている。
- 光は横波である。$\longrightarrow$ エーテルは固体である。
- 光の伝わる速さが非常に速い。$\longrightarrow$ エーテルは非常に硬い。
- 天体や地上の物体が何の抵抗もなく動きまわる。$\longrightarrow$ 希薄な気体のように、エーテルには抵抗がない。

絶対静止系

Maxwell 方程式は、運動する座標系へ座標変換（Galilei 変換）すると異なる形になってしまう。そのため、Maxwell 方程式は、運動しない座標系でだけ成り立つ法則であると考えられた。

すると、「運動しない座標系とはどの座標系か」という疑問が当然生まれる。

運動しない座標系を抽象的な存在として仮定することはできる。しかし、具体的に想定し得るのだろうか。

たとえば、地面に固定した座標系がそれかと考えると、明らかにそうではなかろう。なぜなら、地面は私たちにとって静止しているように感じられるものの、地球が太陽系の中を運動していると考えられているからである。では、太陽に固定した座標系はどうかというと、たしかに惑星の運動を考察するときなど太陽を静止していると仮定するけれども、銀河に対しては太陽も運動していることが知られているので、これもやはり違うことになる。そのように考えていくと、結局、具体的な物体に固定した座標系で運動していないと言えるものなど、何も存在しないことに気づく。

しかし、宇宙空間をエーテルが満たしているならば、エーテルに固定した座標系を運動しない座標系と考えればよい。なぜなら、エーテルが静止しているように観測される座標系では、物理現象がエーテルの運動の影響を受けず、電磁気学の法則に単純に従う、すなわち、Maxwell 方程式が成り立つと考えられるからである。

この、エーテルに固定した座標系を「**絶対静止系**」と呼ぶ。

エーテルすなわち絶対静止系が存在するならば、絶対静止系に対する地球の運動の速度を測定できるのではないかと期待できる。光はエーテルに対して 光速 c で伝播するから、地球に対する相対的な光の 速さ c' を測定すれば、 c との差から、地球の絶対的な速度がわかるはずである。

Michelson-Morley の実験

1887 年、Michelson と Morley によって、歴史に残る実験が行われた。次のような実験である。

1 つの光線をハーフミラーで分割し、地球の運動と同じ方向およびそれに垂直な方向の 2 つの行路を通って同じ距離を往復させ、再び重ねる。地球の運動のために、2 つの行路を進む光の見かけの速さが異なるので、2 つの行路を往復するのにかかる時間は一致しない。その時間差により、再び重なったとき 2 つの光の位相がずれ、干渉が起こる。干渉した光の強度を測ることによって 2 つの光の位相差を求め、その位相差から往復にかかる時間差を求める。その時間差から、地球の運動と光の見かけの速さとの間に成り立つ関係を利用して、エーテルに対する地球の速さを求める。

実験の結果は、予想に反するものだった。きわめて精密な測定の結果、エーテルに対する地球の速さは 0 という結論になった。他の研究者による追試が精度を上げて行われたが、同じ結果であった。

1.2 光速度不変の原理

Michelson と Morley の実験の結果、エーテルに対する地球の速度が 0 という結論が得られたことは、地球に対して静止した観測者から見た光の見かけの速さが、実験装置のどの腕をどちら向きに進む場合にもすべて同じであったことを意味している。

そのように観測される原因として、「地球がエーテルに対して静止している」すなわち「エーテルが地球と一緒に運動している」を考えることができるが、到底、現実的とは思えない。しかし、これ以外の合理的な説明も、長い間、得られなかった。

そのため、19 世紀末の物理学者は

「真空中を伝わる光の速さは、観測者がどのような運動状態であっても、つねに 一定値 c と観測される」

という性質を自然が a priori に持っており、これは、合理的な説明なしに成り立つ普遍的な原理なのである、という理解をするようになった。これを**光速度不変の原理**と呼ぶ。

問題 1

地球は太陽の周りを回る公転運動をしている。この地球の運動が、絶対静止系に対してどれくらいの速さなのかを調べるために、Michelson と Morley のグループは、次のような実験を行なった。

図 1 で、光源 S から出た光は、ハーフミラー H によって 2 つの行路に分けられ、ひとつは右方向に進み反射鏡 M_1 で反射され、H に戻る。もうひとつは上方向に進み反射鏡 M_2 で反射され、H に戻る。H で再びこれらの光は合流し、重なりあって検出器 D に向かう。このとき、H から M_1 までの距離と H から M_2 までの距離が等しいので、装置が静止していれば合流した光は強め合う。しかし、H→M_1 の方向が地球の運動方向と平行になるようにすると、光の進む速さが見かけ上変わるので、合流した光の位相はずれる。これを利用して地球の 速さ v を求めようというものである。

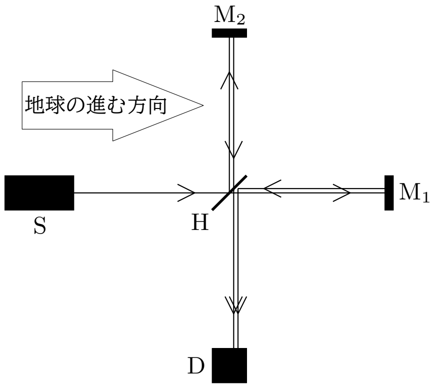

図　1

実験装置全体を地球上にいる人から見た場合と絶対静止系（以下では「宇宙空間」と呼ぶ）にいる人から見た場合に、それぞれどのように見えるかを図 2 に示す。図 2 では、絶対静止系に対する光の速さを c 、地球上にいる人に対する光の速さ（3 通りある）を c_1 、 c_2 、 c_3 としている。

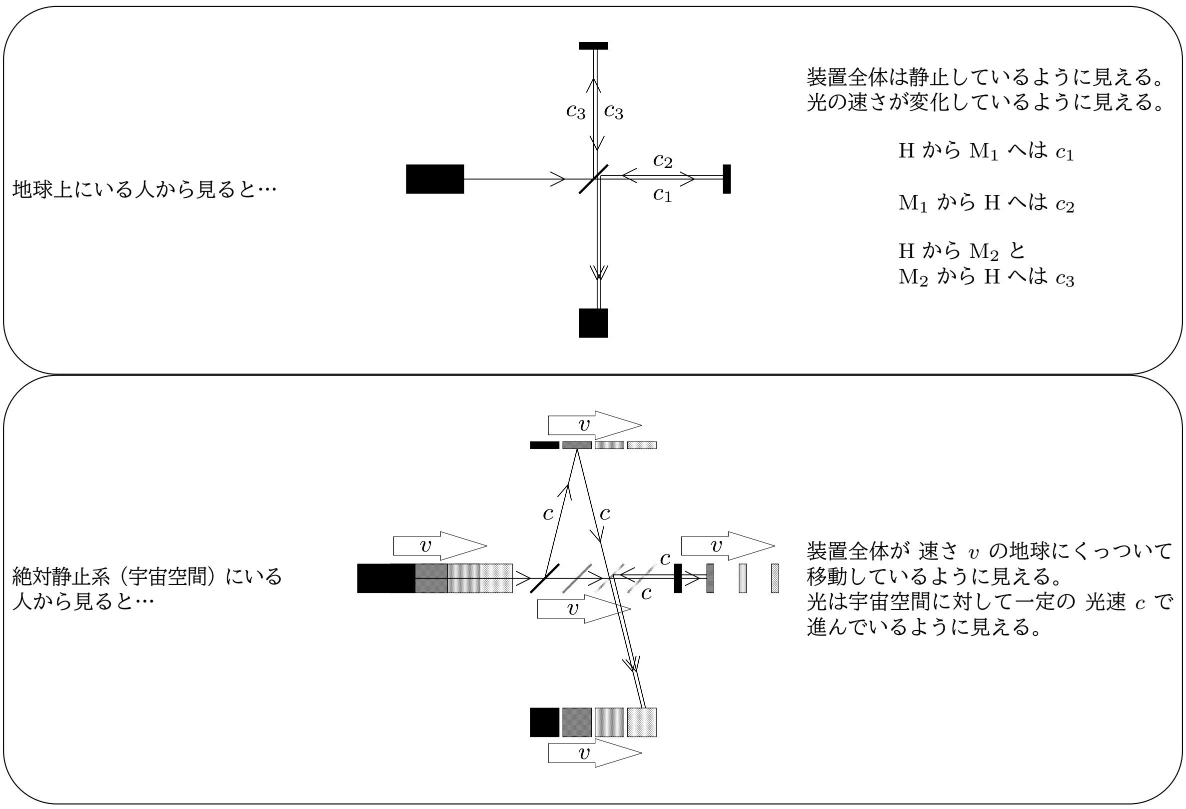

図　2

さて、 波長 $\lambda = 550\,\mathrm{nm}$ の黄色光を用い、この装置を使って、腕の長さ L （ $=$ H から $\mathrm{M_1}$ までの距離 $=$ H から $\mathrm{M_2}$ までの距離）が短い状態から始めて、だんだん L を長くしながら実験を繰り返したところ、 L が $27.5\,\mathrm{m}$ のときに最初に検出器に入る光が最も弱くなったとする。

地球の進む 速さ v を求めなさい。

$c = 3.00 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$ とする。相対性理論以前の物理学で考えよ。 h が 1 に比べて非常に小さいとき、以下の近似式が使える。

$$\frac{1}{\sqrt{1-h}} \cong 1 + \frac{1}{2}\,h$$

$$\frac{1}{1-h} \cong 1 + h$$

問題 1 の答

行路差を生むのは H→M_1→H の部分と H→M_2→H の部分である。だから、これらの部分についてだけ考えればよい。

まず、光の 見かけの速さ c_1 , c_2 , c_3 を求める。

光は実際は 速さ c で進むのであるが、それは絶対静止系（宇宙空間）に対しての速さであって、我々は 速さ v で動く地球に乗って、動きながら観測するのである。

したがって、光が H から M_1 に向かって進むときには、我々は 速さ c の光を 速さ v で追いかけるため、相対的に光が 速さ $(c-v)$ で進んで行くように見える。つまり、 $c_1 = c - v$ である。また、光が M_1 から H に向かって進むときには、我々は 速さ c で向かって来る光に 速さ v で向かって行くため、相対的に光が 速さ $(c+v)$ で進んで来るように見える。つまり、 $c_2 = c + v$ である。

いっぽう、光が H から M_2 に向かって進むときには、地球上の観測者は、図 2 上段のように光が H で直角に曲げられているように感じているが、宇宙空間から見れば、光は図 2 下段のように M_2 の移動に合わせて斜めに進んでいるはずである。したがって、光が実際に進んだ距離の $\dfrac{\sqrt{c^2-v^2}}{c}$ 倍 しか進んでいないように見えているため、我々には光が速さ $\sqrt{c^2-v^2}$ で進むように見える。つまり、 $c_3 = \sqrt{c^2-v^2}$ である。

以上のことを踏まえて、2 つの腕を往復する光の行路差を求める。

腕の長さを L とすると、光が H から M_1 まで進むのにかかる時間は $\dfrac{L}{c_1}$ であり、 M_1 から H まで進むのにかかる時間は $\dfrac{L}{c_2}$ である。したがって、 M_1 側の腕を往復する 時間 t_1 は

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{L}{c_1} + \frac{L}{c_2} \\ &= \frac{L}{c-v} + \frac{L}{c+v} \\ &= \frac{2\,c\,L}{c^2-v^2} \end{aligned}$$

である。

また、 M_2 側の腕を往復する 時間 t_2 は、往きも帰りも等しく $\dfrac{L}{c_3}$ の時間がかかるので

$$\begin{aligned} t_2 &= \frac{L}{c_3} + \frac{L}{c_3} \\ &= \frac{L}{\sqrt{c^2-v^2}} + \frac{L}{\sqrt{c^2-v^2}} \\ &= \frac{2\,L}{\sqrt{c^2-v^2}} \end{aligned}$$

である。

それぞれの腕を光が往復するのにかかる時間が求められた。それに光速を掛ければ、それぞれの腕を往復する光の行路長が得られる。M_1 側の腕を往復する光の行路長を d_1 、M_2 側の腕を往復する光の行路長を d_2 とすると

$$\begin{aligned} d_1 &= c\,t_1 \\ &= \frac{2\,c^2 L}{c^2 - v^2} \\ &= \frac{2\,L}{\left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)} \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} d_2 &= c\,t_2 \\ &= \frac{2\,c\,L}{\sqrt{c^2 - v^2}} \\ &= \frac{2\,L}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \end{aligned} \tag{2}$$

となる。

行路差 $\varDelta$ は

$$\varDelta = |\,d_1 - d_2\,| \tag{3}$$

である。

(3) 式に (1) 式と (2) 式を代入すれば行路差が求まるが、(1) 式と (2) 式は複雑すぎる。そこで、$\dfrac{v^2}{c^2} \ll 1$ であることを利用し、適切な近似を用いて (1) 式と (2) 式を簡略化しておく。

問題文に与えられた近似式を用いて (1) 式と (2) 式を簡略化すると

$$\begin{aligned} d_1 &\cong 2\,L\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) \\ d_2 &\cong 2\,L\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{v^2}{c^2}\right) \end{aligned}$$

となる。

これらを (3) 式に代入すれば、 行路差 $\varDelta$ として

$$\varDelta = L\,\frac{v^2}{c^2}$$

を得る。

$\varDelta$ が半波長の奇数倍になったときに、光は弱め合う。 $L = 27.5\,\mathrm{m}$ で最初に弱め合いが起こったので、このとき、 $\varDelta$ は半波長の 1 倍 になったと考えられる。すなわち

$$L\,\frac{v^2}{c^2} = \frac{\lambda}{2} \times 1$$

が成り立つ。

これを v について解き、 $\lambda = 5.5 \times 10^{-7}\,\mathrm{m}$ 、 $L = 27.5\,\mathrm{m}$ 、 $c = 3.0 \times 10^{8}\,\mathrm{m}$ を代入すると

$$v = 30\,\mathrm{km/s}$$

を得る。

問題 2

Michelson と Morley の実験を模した **問題 1** の思考実験について、起こると考えられる現象の性質を表にまとめよう。2 つの腕の長さが等しくない場合も含めるものとし、M_1 側の腕の長さを L_1 、M_2 側の腕の長さを L_2 とする。

以下の表の 欄 ア、イ、ウ、エ、オ、カ、キ、ク、ケ、コ、サ、シ、ス を埋める式を書け。

	宇宙空間に対して静止している観測者から見ると	地球に対して静止している観測者から見ると
H と M_1 の間を往復する光の進む距離	ア	イ
H と M_1 の間を往復する光の進む時間	ウ	エ
H と M_1 の間を往復する光の見かけの速さ	オ	往路は カ 復路は キ

	宇宙空間に対して静止している観測者から見ると	地球に対して静止している観測者から見ると
H と M_2 の間を往復する光の進む距離	ク	ケ
H と M_2 の間を往復する光の進む時間	コ	サ
H と M_2 の間を往復する光の見かけの速さ	シ	ス

問題 2 の答

第 1 に、光は、絶対静止系、すなわち宇宙空間に対して 速さ c で進むから、宇宙空間に対して静止している観測者から見た光の速さは c である。すなわち

$$\text{オ} = c \qquad \text{シ} = c$$

第 2 に、カは **問題 1** の c_1 、キは **問題 1** の c_2 、スは **問題 1** の c_3 である。すなわち

$$\text{カ} = c - v \qquad \text{キ} = c + v \qquad \text{ス} = \sqrt{c^2 - v^2}$$

第 3 に、地球に対して静止している観測者から見れば、どちらも、光は静止している 2 点間を往復するように見える。よって、イは H と M_1 の間の 距離 L_1 の 2 倍 、ケは H と M_2 の間の 距離 L_2 の 2 倍 である。すなわち

$$\text{イ} = 2\,L_1 \qquad \text{ケ} = 2\,L_2$$

第 4 に、エは L_1 をカで割った値と L_1 をキで割った値の和、サはケをスで割った値である。すなわち

$$\text{エ} = \frac{2\,c\,L_1}{c^2 - v^2} \qquad \text{サ} = \frac{2\,L_2}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

第 5 に、それぞれの腕を光が往復するのにかかる時間は観測者とは無関係な値である。よって、ウはエと同じであり、コはサと同じである。すなわち

$$\text{ウ} = \frac{2\,c\,L_1}{c^2 - v^2} \qquad \text{コ} = \frac{2\,L_2}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

第 6 に、アはウにオを掛けた値、クはコにシを掛けた値である。ゆえに

$$\text{ア} = \frac{2\,c^2}{c^2 - v^2}\,L_1 \qquad \text{ク} = \frac{2\,c}{\sqrt{c^2 - v^2}}\,L_2$$

以上のすべての結論を書き込めば、以下の表を得る。

	宇宙空間に対して静止している観測者から見ると	地球に対して静止している観測者から見ると
H と M_1 の間を往復する光の進む距離	$\dfrac{2\,c^2}{c^2 - v^2}\,L_1$	$2\,L_1$
H と M_1 の間を往復する光の進む時間	$\dfrac{2\,c\,L_1}{c^2 - v^2}$	$\dfrac{2\,c\,L_1}{c^2 - v^2}$
H と M_1 の間を往復する光の見かけの速さ	c	往路は $c - v$ 復路は $c + v$

	宇宙空間に対して静止している観測者から見ると	地球に対して静止している観測者から見ると
H と M_2 の間を往復する光の進む距離	$\dfrac{2\,c}{\sqrt{c^2 - v^2}}\,L_2$	$2\,L_2$
H と M_2 の間を往復する光の進む時間	$\dfrac{2\,L_2}{\sqrt{c^2 - v^2}}$	$\dfrac{2\,L_2}{\sqrt{c^2 - v^2}}$
H と M_2 の間を往復する光の見かけの速さ	c	$\sqrt{c^2 - v^2}$

問題 3

問題 2 で作った表を利用して、Michelson と Morley の実験の結果に対する物理的な解釈を導こう。

宇宙空間に対して静止している観測者から見た、光が H と M_1 の間を往復するのにかかる時間を $T_{1\text{宇}}$ 、H と M_2 の間を往復するのにかかる時間を $T_{2\text{宇}}$ とする。地球に対して静止している観測者から見た、光が H と M_1 の間を往復するのにかかる時間を $T_{1\text{地}}$ 、H と M_2 の間を往復するのにかかる時間を $T_{2\text{地}}$ とする。宇宙空間に対して静止している観測者から見た L_1 を $L_{1\text{宇}}$ 、 L_2 を $L_{2\text{宇}}$ とする。地球に対して静止している観測者から見た L_1 を $L_{1\text{地}}$ 、 L_2 を $L_{2\text{地}}$ とする。

問題 1 と **問題 2** の考察では

$$T_{1\text{宇}} = T_{1\text{地}} \tag{4}$$

$$T_{2\text{宇}} = T_{2\text{地}} \tag{5}$$

$$L_{1\text{宇}} = L_{1\text{地}} \tag{6}$$

$$L_{2\text{宇}} = L_{2\text{地}} \tag{7}$$

の 4 つを無条件に仮定していた。 **問題 2** では、 $L_{1\text{宇}} = L_{1\text{地}}$ を L_1 、 $L_{2\text{宇}} = L_{2\text{地}}$ を L_2 と書いていた。

また、 **問題 1** と **問題 2** の考察では、Galilei 変換が成り立つことを仮定していた、つまり、光速度不変の原理を前提としていなかった。

ここでは、光速度不変の原理を前提にして考察を行う。
そのために、Galilei 変換が成り立つという仮定は放棄する。
同時に、(4) 式、(5) 式、(6) 式の 3 つの仮定を放棄する。(7) 式は成り立つと仮定する。

光速度不変の原理を前提にするということは、 **問題 2** の表の 欄 オ、カ、キ、シ、ス をすべて「 c 」という式で埋めることに他ならない。

1. **問題 2** の表の 欄 ア、イ、ウ、エ、ク、ケ、コ、サ を埋める式を導け。
2. $T_{2\text{宇}}$ は $T_{2\text{地}}$ の何倍か。
3. 前問の結論は、何を意味するか。

$L_{1\text{地}} = L_{2\text{地}}$ である場合を考える。

4. $T_{1\text{地}}$ と $T_{2\text{地}}$ の間にどのような関係が成り立つか。
5. $T_{1\text{宇}}$ と $T_{2\text{宇}}$ の間にどのような関係が成り立つか。
6. 前問の結論を根拠に、 $L_{1\text{宇}}$ が $L_{1\text{地}}$ の何倍かを求めよ。
7. 前問の結論は、何を意味するか。

問題 3 の答

1. 宇宙空間に対して静止している観測者にとっては、元々、光は 速さ c で伝わるように見えていたのだから、光速度不変の原理を前提にしたところで、 **問題 2** までと変わらない。

   したがって、ア、ウ、ク、コは **問題 2** と同じである。ただし、 L_1 は $L_{1\,宇}$ 、 L_2 は $L_{2\,宇}$ と書く必要がある。すなわち

$$ア = \frac{2\,c^2}{c^2 - v^2} L_{1\,宇} \qquad ウ = \frac{2\,c\,L_{1\,宇}}{c^2 - v^2} \qquad ク = \frac{2\,c}{\sqrt{c^2 - v^2}} L_{2\,宇} \qquad コ = \frac{2\,L_{2\,宇}}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

   である。

   地球に対して静止している観測者にとっては、 **問題 2** と同じであるとは限らない。

   イ、ケは、どちらも、観測者から見て静止している 2 点間を往復する距離である。つまり、イは H と M_1 の間の距離 $L_{1\,地}$ の 2 倍 、ケは H と M_2 の間の 距離 $L_{2\,地}$ の 2 倍 である。すなわち

$$イ = 2\,L_{1\,地} \qquad ケ = 2\,L_{2\,地}$$

   エ、サは、観測者から見た光の速さが c であることと整合する値でなければならない。つまり、エはイを c で割った値、サはケを c で割った値である。すなわち

$$エ = \frac{2\,L_{1\,地}}{c} \qquad サ = \frac{2\,L_{2\,地}}{c}$$

   である。

   以上のすべての結論を書き込めば、以下の表を得る。

	宇宙空間に対して静止している観測者から見ると	地球に対して静止している観測者から見ると
H と M_1 の間を往復する光の進む距離	$\frac{2\,c^2}{c^2 - v^2} L_{1\,宇}$	$2\,L_{1\,地}$
H と M_1 の間を往復する光の進む時間	$\frac{2\,c\,L_{1\,宇}}{c^2 - v^2}$	$\frac{2\,L_{1\,地}}{c}$
H と M_1 の間を往復する光の見かけの速さ	c	c

	宇宙空間に対して静止している観測者から見ると	地球に対して静止している観測者から見ると
H と M_2 の間を往復する光の進む距離	$\frac{2\,c}{\sqrt{c^2 - v^2}} L_{2\,宇}$	$2\,L_{2\,地}$
H と M_2 の間を往復する光の進む時間	$\frac{2\,L_{2\,宇}}{\sqrt{c^2 - v^2}}$	$\frac{2\,L_{2\,地}}{c}$
H と M_2 の間を往復する光の見かけの速さ	c	c

2. $T_{2\,宇}$ は、 設問 1. で得た表の 2 つ目、中段、左の欄である。すなわち

$$T_{2\,宇} = \frac{2\,L_{2\,宇}}{\sqrt{c^2 - v^2}} \tag{8}$$

である。 $T_{2\,地}$ は、 設問 1. で得た表の 2 つ目、中段、右の欄である。すなわち

$$T_{2\,地} = \frac{2\,L_{2\,地}}{c} \tag{9}$$

である。

(8) 式と (9) 式を比較して

$$T_{2\,宇} = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}\,T_{2\,地}$$

である。

3. $T_{2\,宇}$ と $T_{2\,地}$ が一致しないということは、1 つの現象を複数の観測者が観測するとき、現象が始まってから終わるまでの経過時間が、観測者によって異なることを意味する。つまり、時間は観測者と無関係に定まる量ではなく、観測者の運動の 速さ v に依存して変化する量であるということ、すなわち、時間の相対性を表しているということができる。

2 つの 時間 $T_{2\,宇}$ と $T_{2\,地}$ は、光が H を出てから再び H に戻るまでの時間であるから、H が存在する点で起こる 2 つの事象の時間間隔である。H が存在する点は地球と一緒に動いているので、 $T_{2\,地}$ のほうを、事象が起こる点と一緒に動く観測者の時計で測った時間だと解釈することができる。その場合、 $T_{2\,宇}$ は、事象が起こる点と一緒には動かない観測者の時計で測った時間である。

この 2 人の観測者の時計のうち、どちらが速く進み、どちらが遅れるのか。 $\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}$ が 1 より小さいので、$T_{2\,宇}$ は $T_{2\,地}$ よりも大きい。よって、事象が起こる点と一緒には動かない観測者の時計のほうが、事象が起こる点と一緒に動く観測者の時計よりも、速く進む。

このことは、前者を「物体の動きを調べようとする客観的な観測者の時計」、後者を「動く物体に取り付けられた時計」とみなす立場から、しばしば「運動する時計は遅れる」という言葉で表現される。

4. $T_{1\,地}$ は、 設問 1. で得た表の 1 つ目、中段、右の欄である。すなわち

$$T_{1\,地} = \frac{2\,L_{1\,地}}{c} \tag{10}$$

である。

$L_{1\,地} = L_{2\,地}$ として (9) 式と (10) 式を比較すると

$$T_{1\,地} = T_{2\,地}$$

が成り立つことがわかる。

5. 前問の結論より、地球に対して静止する観測者から見て、光が 2 つの腕を往復するのにかかる時間は等しいので、2 つの腕を往復した光がふたたび H に到着するのは、同時である。

1 つの点で同時に起こる事象はどの観測者から見ても同時に起こるはずである。

よって、宇宙空間に対して静止する観測者から見ても、光が 2 つの腕を往復するのにかかる時間は等しい。すなわち

$$T_{1\,宇} = T_{2\,宇}$$

が成り立つ。

6. $T_{1\,宇}$ は、 設問 1. で得た表の 1 つ目、中段、左の欄である。すなわち

$$T_{1\,宇} = \frac{2\,c\,L_{1\,宇}}{c^2 - v^2} \tag{11}$$

である。

前問の結論に (8) 式と (11) 式を代入すると

$$\frac{2\,c\,L_{1\,宇}}{c^2 - v^2} = \frac{2\,L_{2\,宇}}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

となる。これより

$$L_{1\,宇} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,L_{2\,宇}$$

である。

いま、 $L_{1\,地} = L_{2\,地}$ の場合を考えていて、(7) 式の仮定もあるから、 $L_{2\,宇} = L_{1\,地}$ である。したがって

$$L_{1\,宇} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,L_{1\,地}$$

である。

7. $L_{1\,宇}$ と $L_{1\,地}$ が一致しないということは、1 つの物体を複数の観測者が観測するとき、物体の長さが、観測者によって異なることを意味する。つまり、空間の尺度は観測者と無関係に定まるのではなく、観測者の運動の 速さ v に依存して変化するということ、すなわち、空間の相対性を表しているということができる。

2 つの 長さ $L_{1\,宇}$ と $L_{1\,地}$ は、地球上に固定された装置の中の部品 H と M_1 の間の距離である。装置は宇宙からは動いているように見え地球からは静止しているように見えるので、 $L_{1\,宇}$ のほうを物体が動いているように見える観測者の尺度で測った長さだと解釈し、 $L_{1\,地}$ のほうを物体が動いていないように見える観測者の尺度で測った長さだと解釈することができる。

この 2 人の観測者から見た物体の長さは、どちらが長く、どちらが短いのか。 $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ が 1 より小さいので、$L_{1\,宇}$ は $L_{1\,地}$ よりも小さい。よって、観測者から見て動いているように見える物体の長さのほうが、動いていないように見える物体の長さよりも、短い。

このことは、しばしば「運動する物体は縮む」という言葉で表現される。

1.3 Lorentz 変換

Michelson-Morley の実験の結果を説明するには、光速度不変の原理を前提とするしかない。
光速度不変の原理を前提とすることは、以下に説明する Lorentz 変換が成り立つことと同等である。

座標変換

物理現象をある座標系で記述した式を別の座標系で記述した式に変換する関係式を座標変換と呼ぶ。

座標系 S があり、S に対して運動する座標系 S′ があるとする。S 系に対する S′ 系の速度を $\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とする。任意の事象 X を考え、事象 X の起こった時刻と位置の座標を S 系で記述すると $t\,,\,x\,,\,y\,,\,z$ であり、S′ 系で記述すると $t'\,,\,x'\,,\,y'\,,\,z'$ であるとする。

このとき、 $t'\,,\,x'\,,\,y'\,,\,z'$ を $t\,,\,x\,,\,y\,,\,z$ と $V\,,\,c$ で表す関係式が、S 系から S′ 系への座標変換である。

Galilei 変換

光速度不変の原理が発見される以前に成り立つと考えられていた S 系から S′ 系への座標変換が **Galilei 変換**である。
Galilei 変換は次の式で表される。

$$
\begin{aligned}
t' &= t \\
x' &= x - V\,t \\
y' &= y \\
z' &= z
\end{aligned}
$$

これは、経験から得られる関係式であり、私たちの「常識」ともみなせるものである。

Lorentz 変換

光速度不変の原理を前提とすると、S 系から S′ 系への座標変換として **Lorentz 変換**が成り立たなければならない。
Lorentz 変換は次の式で表される。真空中の光速を c として

$$
\begin{aligned}
t' &= \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}\,t - \frac{V}{c^2\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}\,x \\
x' &= \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}\,x - \frac{V}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}\,t \\
y' &= y \\
z' &= z
\end{aligned}
$$

$\beta = \dfrac{V}{c}$ 、 $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ とおけば、次のようにも表せる。

$$(c\,t') = \gamma\,(c\,t) - \gamma\,\beta\,x \tag{12}$$

$$x' = \gamma\,x - \gamma\,\beta\,(c\,t) \tag{13}$$

$$y' = y \tag{14}$$

$$z' = z \tag{15}$$

行列を用いて表現すれば、次のようになる。

$$
\begin{pmatrix} c\,t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\,\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\,\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\,t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{16}
$$

1.4 速度の合成則

S 系で観測して 速度 $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$ で運動している物体を S′ 系で観測すると 速度 $\boldsymbol{v}' = \begin{pmatrix} {v_x}' \\ {v_y}' \\ {v_z}' \end{pmatrix}$ で運動しているように観測されるとする。

$\boldsymbol{v}'$ を $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{V}$ で表す関係式を**速度の合成則**と呼ぶ。

Galilei 変換

Galilei 変換が成り立つならば、速度の合成則は

$$
\begin{aligned}
{v_x}' &= v_x - V \\
{v_y}' &= v_y \\
{v_z}' &= v_z
\end{aligned}
$$

である。

Lorentz 変換

Lorentz 変換が成り立つならば、速度の合成則は

$$
\begin{aligned}
{v_x}' &= \frac{v_x - V}{1 - \dfrac{V\,v_x}{c^2}} \\
{v_y}' &= \frac{v_y}{\gamma\left(1 - \dfrac{V\,v_x}{c^2}\right)} \\
{v_z}' &= \frac{v_z}{\gamma\left(1 - \dfrac{V\,v_x}{c^2}\right)}
\end{aligned}
$$

である。

この速度の合成則によれば、 $|\boldsymbol{v}| = c$ であれば V によらず $|\boldsymbol{v}'| = c$ になる。つまり、光速で動くものを動きながら観測すると光速で動くように見えることが示されていて、光速度不変の原理と整合する。

また、 $|\boldsymbol{v}| < c$ かつ $|V| < c$ であれば $|\boldsymbol{v}'| < c$ になる。つまり、光速よりも遅く動くものを光速よりも遅く動きながら観測すると光速よりも遅く動くように見えることが示されていて、光速以上の速さが観測されることはないことが導かれる。

問題 4

問題 3 の考察をさらに深めて、光速度不変の原理を前提とした場合の「宇宙空間に対して静止している観測者から見た事象の時刻と位置」から「地球に対して静止している観測者から見た同じ事象の時刻と位置」を求める変換公式を導こう。

事象の位置に関しては、ここでは、H と M_1 を結ぶ直線に平行な方向の座標だけについて考えることとし、それと直交する方向の座標は問題にしない。H から M_1 へ向かう向きを正の向きとする。

任意の事象 X を考え、宇宙空間に対して静止している観測者から見た事象 X の時刻を t 、位置を x とし、地球に対して静止している観測者から見た事象 X の時刻を t' 、位置を x' とする。

「光が M_1 と M_2 に向かって H を出発する」という事象を事象 A とする。事象 A の、双方の観測者から見た時刻と位置を $t = 0$ 、 $x = 0$ 、 $t' = 0$ 、 $x' = 0$ とする。

$L_{1\,地} = L_{2\,地}$ である場合を考え、これを L と書く。 $L_{1\,宇}$ と $L_{2\,宇}$ も L を使って表せるので、 $L_{1\,宇}\,,\,L_{2\,宇}\,,\,L_{1\,地}\,,\,L_{2\,地}$ の文字は使わず、 L を使って議論を進める。

1. 「M_1 と M_2 で反射した光がふたたび H に到達する」という事象を事象 B とする。事象 B の、双方の観測者から見た時刻と位置を $t = t_1$ 、 $x = x_1$ 、 $t' = t'_1$ 、 $x' = x'_1$ とする。 $t_1\,,\,x_1\,,\,t'_1\,,\,x'_1$ を求めよ。

2. 事象 A が起こった宇宙空間上の点を点 O とする。「H に戻った光が H を通過してさらに進み点 O に到達する」という事象を事象 C とする。事象 C の、双方の観測者から見た時刻と位置を $t = t_2$ 、 $x = x_2$ 、 $t' = t'_2$ 、 $x' = x'_2$ とする。 $t_2\,,\,x_2\,,\,t'_2\,,\,x'_2$ を求めよ。

3. 時刻と位置の組 (t, x) から (t', x') への変換が線形変換であると仮定する。すなわち、定数 $a\,,\,b\,,\,d\,,\,e$ を用いて、変換公式

$$t' = a\,t + b\,x \tag{17}$$

$$x' = d\,t + e\,x \tag{18}$$

が成り立つと仮定する。 $a\,,\,b\,,\,d\,,\,e$ を求めよ。

4. 前問の結論を使って、 (t', x') から (t, x) への変換公式を求めよ。

問題 4 の答

1. ここで与えられた条件と **問題 3** の条件より、 $L_{1\,地} = L$ 、 $L_{2\,地} = L$ 、 $L_{1\,宇} = \sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}\,L$ 、 $L_{2\,宇} = L$ である。以下、これらを用いる。

   t_1 は、 **問題 3** の 設問 1. の 2 つの表の、中段、左の欄である。すなわち

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{2\,c\,L_{1\,宇}}{c^2 - v^2} \quad \text{または} \quad \frac{2\,L_{2\,宇}}{\sqrt{c^2 - v^2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{L}{c} \end{aligned} \tag{19}$$

   である。

   x_1 は、宇宙空間に対して静止している観測者から見た、 $t = t_1$ における H の座標である。宇宙空間に対して静止している観測者から見ると、H は、 $t = 0$ に $x = 0$ の位置にあり、そこから、 時間 t_1 の間に $v\,t_1$ だけ変位するので

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 + v\,t_1 \\ &= \frac{2}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{v}{c}\,L \end{aligned} \tag{20}$$

   である。

   ${t_1}'$ は、 **問題 3** の 設問 1. の 2 つの表の、中段、右の欄である。すなわち

$$\begin{aligned} {t_1}' &= \frac{2\,L_{1\,地}}{c} \quad \text{または} \quad \frac{2\,L_{2\,地}}{c} \\ &= 2 \cdot \frac{L}{c} \end{aligned} \tag{21}$$

   である。

   ${x_1}'$ は、地球に対して静止している観測者から見た、 $t' = {t_1}'$ における H の座標である。地球に対して静止している観測者から見ると、H は、 $x' = 0$ の位置にあり動かないので

$${x_1}' = 0 \tag{22}$$

   である。

2. x_2 は、宇宙空間に対して静止している観測者から見た、 $t=0$ に H があった座標である。すなわち

$$x_2 = 0 \tag{23}$$

である。

t_2 は、宇宙空間に対して静止している観測者から見た、鏡で反射された光が $x=x_2$ の位置に到達する時刻である。光は、 $t=t_1$ に $x=x_1$ に到達している。そこから、 速度 $-c$ でさらに x_2-x_1 だけ進むのに $\dfrac{x_2-x_1}{-c}$ だけ時間がかかるから

$$\begin{aligned} t_2 &= t_1 + \frac{x_2-x_1}{-c} \\ &= \frac{2\left(1+\dfrac{v}{c}\right)}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{L}{c} \end{aligned} \tag{24}$$

である。

$t_2{}'$ は、地球に対して静止している観測者から見た、移動する O に鏡で反射された光が追いつく時刻である。 $t'=t_1{}'$ に、光は $x'=x_1{}'$ に到達していて、O は $x'=-v\,t_1{}'$ の位置にある。そこから、O は 速度 $-v$ で移動し、光は 速度 $-c$ で進む。つまり、O と光の到達点との座標の差が、 $t'=t_1{}'$ の時点では $(-v\,t_1{}')-x_1{}'$ であり、その後、 $(-c)-(-v)$ の速さで減っていく。したがって、 $t'=t_1{}'$ から O に光が追いつくまでの時間は $\dfrac{(-v\,t_1{}')-x_1{}'}{(-c)-(-v)}$ である。ゆえに

$$\begin{aligned} t_2{}' &= t_1{}' + \frac{(-v\,t_1{}')-x_1{}'}{(-c)-(-v)} \\ &= 2\cdot\frac{L}{c-v} \end{aligned} \tag{25}$$

である。

$x_2{}'$ は、地球に対して静止している観測者から見た、 $t'=t_2{}'$ における O の座標である。O は、 $t'=0$ に $x'=0$ の位置にあり、そこから 時間 $t_2{}'$ の間に $-v\,t_2{}'$ だけ変位するので

$$\begin{aligned} x_2{}' &= 0 - v\,t_2{}' \\ &= -2\cdot\frac{v}{c-v}\,L \end{aligned} \tag{26}$$

である。

3. (17) 式と (18) 式に $t = t_1$ 、 $x = x_1$ 、 $t' = t_1{}'$ 、 $x' = x_1{}'$ および (19) 式・(20) 式・(21) 式・(22) 式を代入すると

$$2 \cdot \frac{L}{c} = a \cdot \frac{2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{L}{c} + b \cdot \frac{2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{v}{c} L \tag{27}$$

$$0 = d \cdot \frac{2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{L}{c} + e \cdot \frac{2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{v}{c} L \tag{28}$$

となる。(17) 式と (18) 式に $t = t_2$ 、 $x = x_2$ 、 $t' = t_2{}'$ 、 $x' = x_2{}'$ および (24) 式・(23) 式・(25) 式・(26) 式を代入すると

$$2 \cdot \frac{L}{c - v} = a \cdot \frac{2\left(1 + \frac{v}{c}\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{L}{c} \tag{29}$$

$$-2 \cdot \frac{v}{c - v} L = d \cdot \frac{2\left(1 + \frac{v}{c}\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{L}{c} \tag{30}$$

となる。

(27) 式・(28) 式・(29) 式・(30) 式を a , b , d , e について解くと

$$a = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{31}$$

$$b = -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{v}{c^2} \tag{32}$$

$$d = -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot v \tag{33}$$

$$e = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{34}$$

を得る。

4. (t', x') から (t, x) への変換公式を

$$t = a'\,t' + b'\,x' \tag{35}$$

$$x = d'\,t' + e'\,x' \tag{36}$$

とする。

(17) 式と (18) 式を t, x について解いた結果を (35) 式・(36) 式と比較すると

$$\begin{aligned} a' &= \frac{e}{a\,e - b\,d} \\ b' &= \frac{-b}{a\,e - b\,d} \\ d' &= \frac{-d}{a\,e - b\,d} \\ e' &= \frac{a}{a\,e - b\,d} \end{aligned}$$

が成り立つことがわかる。

これらに (31) 式・(32) 式・(33) 式・(34) 式を代入すると

$$\begin{aligned} a' &= \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \\ b' &= \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{v}{c^2} \\ d' &= \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \cdot v \\ e' &= \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \end{aligned}$$

を得る。

これは、前問の結論の v を $-v$ で置き換えたものに等しい。

問題 5

座標系 S (t, x, y, z) から、S 系に対して 速度 $\begin{pmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ で運動する 座標系 S$'$ (t', x', y', z') への Lorentz 変換を考える。

S 系での質点の位置の座標を $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ 、S$'$ 系での質点の位置の座標を $\boldsymbol{r}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ とする。

S 系での質点の速度を $\boldsymbol{v} = \dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ 、S$'$ 系での質点の速度を $\boldsymbol{v}' = \dfrac{d\boldsymbol{r}'}{dt'}$ とする。

真空中の光速を c 、 $\beta = \dfrac{V}{c}$ 、 $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ とする。

1. $\boldsymbol{v}'$ の各成分を、 $\boldsymbol{v}$ の各成分と c, β, γ で表せ。
2. $|\boldsymbol{v}| = c$ の場合には、 $|\boldsymbol{v}'|$ はいくらになるか。
3. $V = c$ の場合には、 $|\boldsymbol{v}'|$ はいくらになるか。
4. $V < c$ かつ $|\boldsymbol{v}| < c$ ならば $|\boldsymbol{v}'| < c$ であることを示せ。

問題 5 の答

1. S 系と S′ 系の間の Lorentz 変換は

$$
\begin{aligned}
t' &= \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}\,x\right) \\
x' &= \gamma\left(x - c\,\beta\,t\right) \\
y' &= y \\
z' &= z
\end{aligned}
$$

である。これより、 全微分 dt , dx , dy , dz と dt' , dx' , dy' , dz' の間の関係が

$$
\begin{aligned}
dt' &= \gamma\left(dt - \frac{\beta}{c}\,dx\right) && (37)\\
dx' &= \gamma\left(dx - c\,\beta\,dt\right) && (38)\\
dy' &= dy && (39)\\
dz' &= dz && (40)
\end{aligned}
$$

であることが導かれる。

これを使って、 $\boldsymbol{v}'$ の各成分を $\boldsymbol{v}$ の各成分と c, β, γ で表す式を導く。 $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$ 、 $\boldsymbol{v}' = \begin{pmatrix} {v_x}' \\ {v_y}' \\ {v_z}' \end{pmatrix}$ とする。

まず、x' 成分について考える。

$$
{v_x}' = \frac{dx'}{dt'}
$$

(37) 式と (38) 式を代入して

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\gamma\left(dx - c\,\beta\,dt\right)}{\gamma\left(dt - \frac{\beta}{c}\,dx\right)} \\
&= \frac{dx - c\,\beta\,dt}{dt - \frac{\beta}{c}\,dx} \\
&= \frac{\frac{dx}{dt} - c\,\beta}{1 - \frac{\beta}{c}\,\frac{dx}{dt}} \\
&= \frac{v_x - c\,\beta}{1 - \frac{\beta}{c}\,v_x} && (41)
\end{aligned}
$$

である。

次に、y' 成分について考える。

$$v_y{}' = \frac{dy'}{dt'}$$

(37) 式と (39) 式を代入して

$$\begin{aligned} &= \frac{dy}{\gamma\left(dt - \frac{\beta}{c}\,dx\right)} \\ &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\gamma\left(1 - \frac{\beta}{c}\,\frac{dx}{dt}\right)} \\ &= \frac{v_y}{\gamma\left(1 - \frac{\beta}{c}\,v_x\right)} \end{aligned} \tag{42}$$

である。

最後に、z' 成分について考える。

$$v_z{}' = \frac{dz'}{dt'}$$

(37) 式と (40) 式を代入して

$$\begin{aligned} &= \frac{dz}{\gamma\left(dt - \frac{\beta}{c}\,dx\right)} \\ &= \frac{\frac{dz}{dt}}{\gamma\left(1 - \frac{\beta}{c}\,\frac{dx}{dt}\right)} \\ &= \frac{v_z}{\gamma\left(1 - \frac{\beta}{c}\,v_x\right)} \end{aligned} \tag{43}$$

である。

2. $|\boldsymbol{v}| = c$ や $V = c$ の場合を考える前に、任意の $\boldsymbol{v}$, V に対する $|\boldsymbol{v}'|^2$ を求める。

$$|\boldsymbol{v}'|^2 = {v_x}'^2 + {v_y}'^2 + {v_z}'^2$$

(41) 式・(42) 式・(43) 式を代入して

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{v_x - c\,\beta}{1 - \dfrac{\beta}{c}\,v_x}\right)^2 + \left(\frac{v_y}{\gamma\left(1 - \dfrac{\beta}{c}\,v_x\right)}\right)^2 + \left(\frac{v_z}{\gamma\left(1 - \dfrac{\beta}{c}\,v_x\right)}\right)^2 \\
&= \frac{\left(v_x - c\,\beta\right)^2 + \dfrac{1}{\gamma^2}\,{v_y}^2 + \dfrac{1}{\gamma^2}\,{v_z}^2}{\left(1 - \dfrac{\beta}{c}\,v_x\right)^2} \\
&= \frac{{v_x}^2 - 2\,c\,\beta\,v_x + c^2\,\beta^2 + \dfrac{1}{\gamma^2}\,{v_y}^2 + \dfrac{1}{\gamma^2}\,{v_z}^2}{\left(1 - \dfrac{\beta}{c}\,v_x\right)^2} \\
&= \frac{\dfrac{1}{\gamma^2}\left({v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2\right) + \left(1 - \dfrac{1}{\gamma^2}\right){v_x}^2 - 2\,c\,\beta\,v_x + c^2\,\beta^2}{\left(1 - \dfrac{\beta}{c}\,v_x\right)^2} \\
&= \frac{\dfrac{1}{\gamma^2}\,|\boldsymbol{v}|^2 + \left(1 - \dfrac{1}{\gamma^2}\right){v_x}^2 - 2\,c\,\beta\,v_x + c^2\,\beta^2}{\left(1 - \dfrac{\beta}{c}\,v_x\right)^2} \\
&= \frac{\left(1 - \beta^2\right)|\boldsymbol{v}|^2 + \beta^2\,{v_x}^2 - 2\,c\,\beta\,v_x + c^2\,\beta^2}{\left(1 - \dfrac{\beta}{c}\,v_x\right)^2} \qquad (44)
\end{aligned}$$

である。

$|\boldsymbol{v}| = c$ の場合を考える。(44) 式に $|\boldsymbol{v}| = c$ を代入して

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{v}'|^2 &= \frac{\left(1 - \beta^2\right)c^2 + \beta^2\,{v_x}^2 - 2\,c\,\beta\,v_x + c^2\,\beta^2}{\left(1 - \dfrac{\beta}{c}\,v_x\right)^2} \\
&= \frac{c^2 + \beta^2\,{v_x}^2 - 2\,c\,\beta\,v_x}{\left(1 - \dfrac{\beta}{c}\,v_x\right)^2} \\
&= c^2 \cdot \frac{1 + \dfrac{\beta^2}{c^2}\,{v_x}^2 - 2\,\dfrac{\beta}{c}\,v_x}{\left(1 - \dfrac{\beta}{c}\,v_x\right)^2} \\
&= c^2 \cdot \frac{\left(1 - \dfrac{\beta}{c}\,v_x\right)^2}{\left(1 - \dfrac{\beta}{c}\,v_x\right)^2} \\
&= c^2
\end{aligned}$$

である。

よって、 $|\boldsymbol{v}| = c$ のとき、 $|\boldsymbol{v}'| = c$ である。

3. $V=c$ の場合を考える。(44) 式に $V=c$ 、すなわち $\beta=1$ を代入して

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{v}'|^2 &= \frac{{v_x}^2 - 2\,c\,v_x + c^2}{\left(1-\dfrac{v_x}{c}\right)^2} \\
&= c^2 \cdot \frac{\dfrac{{v_x}^2}{c^2} - 2\,\dfrac{v_x}{c} + 1}{\left(1-\dfrac{v_x}{c}\right)^2} \\
&= c^2 \cdot \frac{\left(1-\dfrac{v_x}{c}\right)^2}{\left(1-\dfrac{v_x}{c}\right)^2} \\
&= c^2
\end{aligned}
$$

である。

よって、 $V=c$ のとき、 $|\boldsymbol{v}'|=c$ である。

4. (44) 式が成り立つとして $c^2-|\boldsymbol{v}'|^2$ を求めると

$$
\begin{aligned}
c^2-|\boldsymbol{v}'|^2 &= c^2 - \frac{\left(1-\beta^2\right)|\boldsymbol{v}|^2 + \beta^2\,{v_x}^2 - 2\,c\,\beta\,v_x + c^2\,\beta^2}{\left(1-\dfrac{\beta}{c}\,v_x\right)^2} \\
&= \frac{c^2\left(1-\dfrac{\beta}{c}\,v_x\right)^2 - \left(\left(1-\beta^2\right)|\boldsymbol{v}|^2 + \beta^2\,{v_x}^2 - 2\,c\,\beta\,v_x + c^2\,\beta^2\right)}{\left(1-\dfrac{\beta}{c}\,v_x\right)^2} \\
&= \frac{\left(c^2 - 2\,c\,\beta\,v_x + \beta^2\,{v_x}^2\right) - \left(\left(1-\beta^2\right)|\boldsymbol{v}|^2 + \beta^2\,{v_x}^2 - 2\,c\,\beta\,v_x + c^2\,\beta^2\right)}{\left(1-\dfrac{\beta}{c}\,v_x\right)^2} \\
&= \frac{c^2 - \left(1-\beta^2\right)|\boldsymbol{v}|^2 - c^2\,\beta^2}{\left(1-\dfrac{\beta}{c}\,v_x\right)^2} \\
&= \frac{\left(1-\beta^2\right)\left(c^2-|\boldsymbol{v}|^2\right)}{\left(1-\dfrac{\beta}{c}\,v_x\right)^2} \qquad (45)
\end{aligned}
$$

である。

(45) 式の分母はつねに正、分子は $V<c$ （すなわち $\beta<1$ ）かつ $|\boldsymbol{v}|<c$ ならば正である。よって、 $V<c$ かつ $|\boldsymbol{v}|<c$ のとき (45) 式は正である。

(45) 式が正であるならば、 $|\boldsymbol{v}'|<c$ である。

以上より、 $V<c$ かつ $|\boldsymbol{v}|<c$ であるならば、 $|\boldsymbol{v}'|<c$ である。

1.5 FitzGerald-Lorentz 収縮と局所時間

Michelson-Morley の実験の結果を説明するためには、光速度不変の原理を前提とせざるを得ない。光速度不変の原理に従うよう、時間と空間の尺度のほうが変化すると考えると、**問題 3** で示したように、動いている物体の**時間の遅れ**と**長さの縮み**が導かれる。それらの一般的な表現を求めれば、Lorentz 変換が得られる。

このような考察は、FitzGerald、Lorentz、Larmor、Poincaré などの物理学者たちによって進められた。

FitzGerald-Lorentz 収縮

1889 年に FitzGerald は、また、1892 年に Lorentz は、「エーテルの中を運動する物体は運動に平行な方向の長さが縮む」と仮定すれば、Michelson と Morley の実験の結果を説明できると指摘した。

真空中の光速を c とし、地球の速さを v とすると、地球の運動に平行な 長さ L_1 の腕 1 を往復する光の進む 距離 d_1 と、地球の運動に垂直な 長さ L_2 の腕 2 を往復する光の進む 距離 d_2 は

$$
\begin{aligned}
d_1 &\cong 2\,L_1\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right) \\
d_2 &\cong 2\,L_2\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{v^2}{c^2}\right)
\end{aligned}
$$

なので

$$
L_1 \cong \left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{v^2}{c^2}\right)L_2 \tag{46}
$$

であれば、 $\dfrac{v}{c}$ の 2 次までの近似で $d_1 \cong d_2$ となる。

これを踏まえると、次のように考えることができる。Michelson らが製作した実験装置は、エーテルに対して静止した状態におけば $L_1 = L_2$ なのだが、エーテルに対して運動している場合は、装置に対する「エーテルの風」によって分子間力が影響を受け、装置全体が地球の運動の方向に縮んで、(46) 式を満たすように変形してしまう。すると、2 つの腕を往復する光の行路差は 0 になるから、干渉の結果は、装置がエーテルに対して静止している場合と変わらない。

このとき、一方の腕の長さが縮んでいることは、地球上から観測する限り、検出できない。なぜなら、長さを測る計測器も、同じ現象により同じ比率で縮むからである。たとえば、腕 2 と同じ長さの棒を用意し、腕 2 の横に並べて同じ長さであることを確かめた後、この棒を腕 1 の横に並べるとやはり同じ長さになってしまう。そのため、地球上にいる観測者には $L_1 = L_2$ であると観測されるので、Michelson と Morley の報告が得られるというわけである。

この仮説で起こるとされる物体の長さの縮みを、**FitzGerald-Lorentz 収縮**と呼ぶ。

局所時間

Lorentz や Larmor は、運動する座標系での電磁気現象や光学現象、FitzGerald-Lorentz 収縮の起こる仕組みなどを調べる過程で、運動する座標系での Maxwell 方程式を静止する座標系での Maxwell 方程式と同じ形に表現するような変数変換の導出を試みた。Maxwell 方程式が同じ形で表されるならば、それらから導かれる真空中の光速も同じになる。

多くの考察が重ねられ、いくつかの段階を経て、該当する変換が発見された。それは、座標系の運動方向の 座標 x と時刻 t を、1 次変換して得られる新しい 変数 x' , t' に置き換えるものであった。

x' は、運動する座標系での x 方向の座標とみなすことができ、見出された公式の解釈から、 x , t の Galilei 変換で得られる結果に FitzGerald-Lorentz 収縮の効果が加わったものと理解された。

いっぽう、 t' については、運動する座標系での時刻に相当すると予想できるものの、具体的に何を表すのか、簡単には理解されなかった。見出された公式は、1892 年の Lorentz の導出では、時間の原点を座標に応じてずらすものであり、1899 年の Lorentz や 1900 年の Larmor の導出では、それに加え、時間のスケールを座標系の運動の速さに応じて伸縮するものであった。Lorentz は、 t' を**局所時間**と名付けたが、その意味は単に計算の見通しをよくするための数学的な技巧であり、物理的な意味はないとした。Poincaré は、離れた場所にある 2 つの時計が同調している（同じ時刻を同時に指している）かどうかを判定する原理を考察することにより、運動する観測者にとっての時刻の認識が静止する観測者とは異なることを指摘し、 t' が物理的な意味を持つことを示唆した。

Lorentz と Larmor は、最終的に、同じ変換を、それぞれ、独自の考察から導き出した。これが、現在知られている Lorentz 変換と同一のものである。Lorentz 変換は、特殊相対性理論において中心的な役割を果たす概念であるが、実は、Einstein の第 1 論文よりも前に、物理的な意味は明確にされなかったものの、数学的には完成していたのである。

1.6 同時性の定義

Einstein は、特殊相対性理論の第 1 論文において、光速度不変の原理を a priori な原理として認め、物理学の理論がこれに沿うために必要な前提を考えるという方法をとった。

Galilei 変換、ひいては、Galilei 変換を成り立たせる前提である**絶対時間**と**絶対空間**の存在を認めると、光速度不変の原理と矛盾する。絶対時間とは、座標系の運動とは無関係に絶対的に測れる唯一の時間、絶対空間とは、座標系の運動とは無関係な絶対的な尺度で測れる空間という概念である。

そこで、Einstein は、それまでの物理学では自明と考えられていたこの前提を疑い、再検討することから議論を出発させた。すなわち、議論の出発点において、時間は座標系の運動に依存する相対的なものだという**時間の相対性**、空間の尺度は座標系の運動に依存する相対的なものだという**空間の相対性**を前提として、絶対時間と絶対空間の存在を否定した。

時間の相対性を前提とすると、2 つの事象をある座標系で観測して同時であるように見えたとしても、別の座標系で観測したら一方が先でもう一方が後であるように見える、ということがあり得るとせねばならない。つまり、事象の起こる順序は座標系によって変化する相対的なものだという**同時性の相対性**が導かれる。

そのため、この議論では、あらためて、「同時」の定義が必要となる。

Einstein は、「時計の同調」という表現を用いて**同時性の定義**を与え、さらに光速度不変の原理を前提とすることで、時間の相対性と空間の相対性の形を定めた。

離れた場所にある時計の同調（同時性の定義）

離れた場所で起こる複数の事象の時間的な順序は、それらの場所にある同調した時計の指す時刻によって定まる。同調した時計の指す時刻が等しいならば、事象は同時である。このように考えると、「時計の同調」とは何かを定義することが、そのまま、各座標系での「同時」および事象の順序を定義することになる。

ある座標系に固定されて離れた場所にある 2 個 の時計 A と B を考える。光は真空を通るとする。このとき

A が 時刻 t_1 を指す瞬間に A から光を発し、これが B に到着する瞬間に B が 時刻 t_2 を指すとする。 B が 時刻 t_2 を指す瞬間に B から光を発し、これが A に到着する瞬間に A が 時刻 t_3 を指すとする。 $t_2 - t_1 = t_3 - t_2$ であれば、A と B は同調している。

である。

光速度不変の原理

そのとき

A と B の間の距離を r とする。 真空中の光速 $c = \dfrac{2\,r}{t_3 - t_1}$ は、座標系によらない普遍定数である。

である。

これに基づいて、互いに運動する 2 つの座標系から見た場合の事象の時刻と座標を考えると、動いている物体の**時間の遅れ**と**長さの縮み**が導かれる。それらの一般的な表現を求めれば、Lorentz 変換が得られる。

Einstein の議論の意義

FitzGerald-Lorentz 収縮と局所時間の概念で Michelson-Morley の実験を説明する Lorentz の理論と、時間の相対性と空間の相対性を前提にする Einstein の特殊相対性理論とは、自然現象の基礎に Lorentz 変換が存在するという同一の帰結を導く。両者は数学的には完全に同一であるから、特殊相対性理論は、この部分に関して、Einstein より先に Lorentz によって作られた理論であると考えることもできる。

しかし、特殊相対性理論は、Lorentz らの功績としてよりも、Einstein の独創性の産物として評価されることが多い。

運動する物体は実際に縮むと考え、局所時間を数学的な技巧ととらえる Lorentz の理論は、飽くまで、それまでの物理学の枠の中での考え方をしている。Poincaré による局所時間の物理的解釈は、観測者によって観測される時間が異なるという、時間の相対性に一歩近づく考え方を提示したが、それでも、観測者にとっての見かけの時間という解釈であり、「真の時間」としての絶対時間の存在を前提としている。

Einstein の独創性は、誰も考えることのなかった時間と空間の本性に疑問の目を向け、それまでの常識に反する、時間と空間の相対性という概念を生み出した部分にある。これこそが、自然の見方を根底から覆す革命というべき部分であり、そのおかげで、特殊相対性理論は、それまでの物理学から大きく飛躍した画期的な理論にまで発展したのである。

問題 6

2本 の同一の物差し X、X′ がある。これらには等間隔の目盛りがつけてあり、両方を静止した状態で重ねると、同じ目盛りどうしはすべて重なる。

X と X′ をどちらも x 軸に平行に置き、X を静止させておいて、X′ を 速度 $\begin{pmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ で等速度運動させる。

以下では、X の目盛りを「X 系の座標」と呼んで x で表し、X′ の目盛りを「X′ 系の座標」と呼んで x' で表す。

たくさんの同一の時計がある。これらは静止した状態で 1 箇所に並べて置くと、すべて同じ速さで針が進む。

X のあらゆる位置に無数の時計が取り付けてあり、X′ のあらゆる位置にも無数の時計が取り付けてある。X に取り付けてあるすべての時計は互いに同調しており、X′ に取り付けてあるすべての時計も互いに同調している。ここで、同調とは、「同時に」観測すれば同じ値を示すように 2 つ以上の時計の針を合わせた状態を指すものとする。

以下では、X に取り付けた時計の指す値を「X 系の時刻」と呼んで t で表し、X′ に取り付けた時計の指す値を「X′ 系の時刻」と呼んで t' で表す。任意の場所の任意の瞬間の時刻は、その場所にある時計がその瞬間に指す値である。

$x = 0$ の時計が $t = 0$ を指した瞬間に、 $x' = 0$ の目盛りが $x = 0$ の目盛りに重なり、$x' = 0$ の時計は $t' = 0$ を指す。$x = x_0$ の時計が $t = 0$ を指した瞬間に、 $x' = x_0{}'$ の目盛りが $x = x_0$ の目盛りに重なり、$x' = x_0{}'$ の時計は $t' = t_0{}'$ を指す。

設問 3. までは、相対性理論以前の物理学の前提（光速度不変の原理を考慮せず、空間の尺度と時刻は座標系に依存しない）で考える。つまり、任意の時刻において任意の 2 点の間の x の差と x' の差とが等しいこと、任意の位置において t と t' とが等しいこと、の 2 つを仮定する。必然的に、 $x_0{}' = x_0$ 、 $t_0{}' = 0$ となる（相対性理論以前の物理学において、これは自明な事実である）。静止した座標系に対する真空中の光速を c とする。

1. $t = 0$ に $x' = x_0{}'$ の位置を発光させる。「この光が $x' = 0$ の位置に到着する」という事象の、 X 系の時刻 t_1 と X 系の座標 x_1 を求めよ。

2. $t = 0$ に $x' = 0$ の位置を発光させる。「この光が $x' = x_0{}'$ の位置に到着する」という事象の、 X 系の時刻 t_2 と X 系の座標 x_2 を求めよ。

3. 何かが空間を動くときの「X′ 系の座標で測った移動距離」を「X′ 系の時刻で測った所要時間」で除した値を「X′ 系での速さ」と呼ぶことにする。 設問 1. の光の X′ 系での速さ $c_1{}'$ と、 設問 2. の光の X′ 系での速さ $c_2{}'$ を求めよ。

ここに示されたように、相対性理論以前の物理学の前提では、光速度不変の原理とは矛盾する議論になる。

そもそも、光速度不変の原理を前提にすれば、X′ 系で測った光の移動距離は 設問 1. の光も 設問 2. の光も同じであるから、X′ 系で測った所要時間も同じであり、発光が同時であれば $x' = 0$ と $x' = x_0{}'$ に光が到着するのも同時になるはずである。しかし、 設問 1. と 設問 2. の考察では、発光は同時だが到着は同時にならない。

光速度不変の原理を前提とするためには、相対性理論以前の物理学の前提を否定し、「X 系で同時だと観測される 2 つの発光が、X′ 系では同時でないと観測される」、つまり、「 設問 1. 2. 3. の仮定では X′ 系の時計は同調していない」と考えるしかない。

設問 4. からは、光速度不変の原理を前提とし、「 $x' = x_0{}'$ の時計が $x' = 0$ の時計よりも X 系で $\varDelta t$ だけ遅れて同じ時刻を指す場合に、両者は同調している」と仮定する。必然的に、 $t_0{}' \neq 0$ となる。また、 $x_0{}' = x_0$ となる必然性は、ない（実際に $x_0{}' \neq x_0$ となることを 設問 6. で示す)。どの座標系で観測しても真空中の光速は c であるとする。

4. $x' = 0$ と $x' = x_0{}'$ から X′ 系で同時に出発した 2 つの光が $x' = x_0{}'$ と $x' = 0$ に X′ 系で同時に到着するように、$\varDelta t$ を定めよ。

5. $t' = 0$ に、X′ の $x' = x_0{}'$ の目盛りと X の $x = x_0 + \varDelta x$ の目盛りが重なるとする。 $\varDelta x$ を求めよ。

6. ある棒を置き、その棒の長さを棒が静止して見える座標系で測れば L 、棒に対して 速さ $|V|$ で長さ方向に運動する座標系で測れば L' であるとすると、 L' は L の（ $|V|$ だけで決まる）定数倍になると考えられる。なぜなら、L' が L の定数倍以外の関数だと、運動する座標系で同じ棒を N 本 繋いだ長さが $N\,L'$ にならない、という矛盾が生じるからである。このことを考慮して、 $x_0{}'$ を x_0 , V , c で表す式を導き、その物理的意味を述べよ。ただし、「棒の長さ」とは、同一の時刻における棒の両端の座標の差である。

7. 「 $t' = 0$ に $x' = x_0{}'$ を出た光が $x = 0$ の位置に到着する」という事象の、X 系の時刻を t_3 、X′ 系の時刻を $t_3{}'$ とする。 $t_3{}'$ を t_3 , V , c で表す式を導き、その物理的意味を述べよ。

問題 6 の答

1. 設問 1. 2. 3. の状況を図 3 に示す。

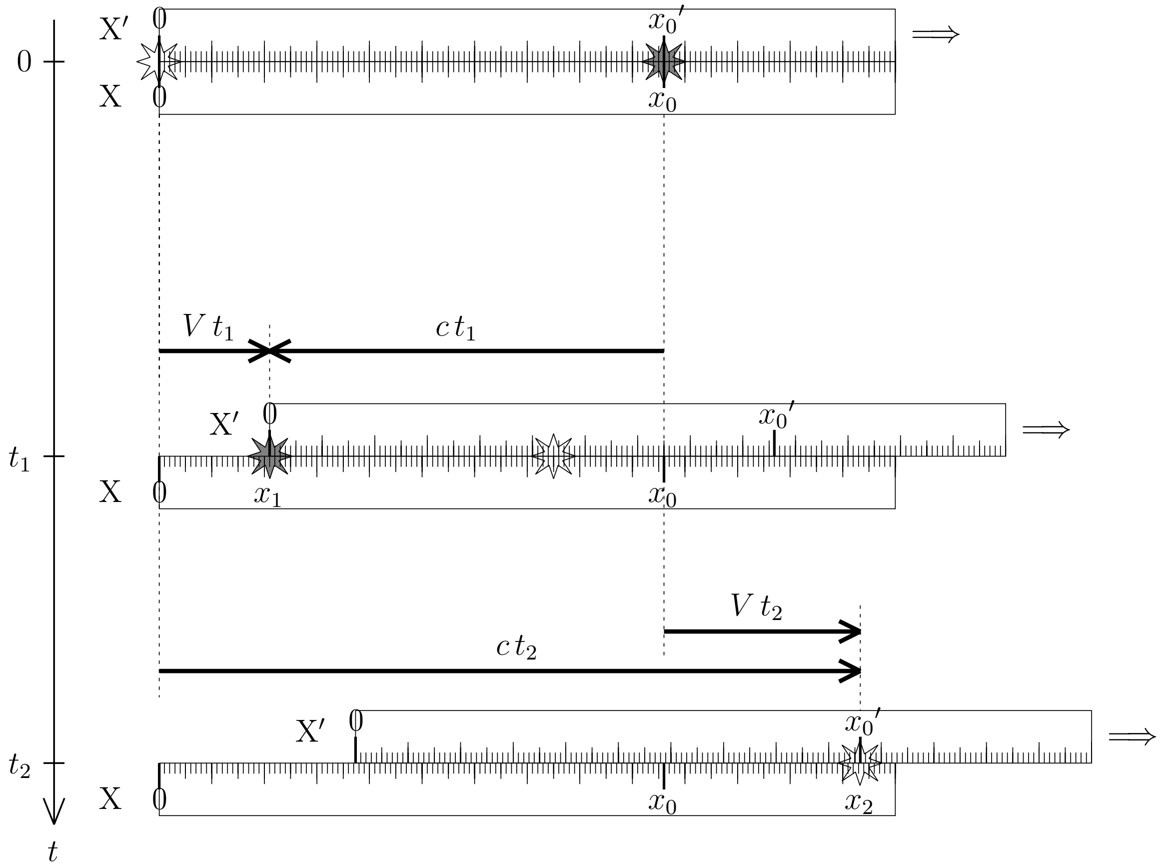

図　3

図 3 からわかるように、X 系で、 $t=0$ から $t=t_1$ までの間に、光は負の向きに 距離 $c\,t_1$ だけ、$x'=0$ の点は正の向きに 距離 $V\,t_1$ だけ進み、これらの距離の和が x_0 に等しい。つまり

$$c\,t_1 + V\,t_1 = x_0$$

が成り立つ。これより

$$t_1 = \frac{x_0}{c+V} \tag{47}$$

が導かれる。

図 3 からわかるように、 $x_1 = V\,t_1$ であるから、(47) 式を代入して

$$x_1 = \frac{V}{c+V}\,x_0$$

を得る。

2. 図 3 からわかるように、X 系で、 $t=0$ から $t=t_2$ までの間に、光は正の向きに 距離 $c\,t_2$ だけ、$x'={x_0}'$ の点は正の向きに 距離 $V\,t_2$ だけ進み、これらの距離の差が x_0 に等しい。つまり

$$c\,t_2 - V\,t_2 = x_0$$

が成り立つ。これより

$$t_2 = \frac{x_0}{c-V} \tag{48}$$

が導かれる。

図 3 からわかるように、 $x_2 = x_0 + V\,t_2$ であるから、(48) 式を代入して

$$x_2 = \frac{c}{c-V}\,x_0$$

を得る。

3. X′ 系の座標で測ると、設問 1. の光が進んだ距離は ${x_0}'$ であり、設問 2. の光が進んだ距離も ${x_0}'$ である。ここでは ${x_0}' = x_0$ であることを前提としているので、結局、どちらも x_0 である。

光が進んだ時間については、ここでは X′ 系の時刻と X 系の時刻とが同じであることを前提としているから、X′ 系の時刻で測った場合も X 系の時刻で測った場合と同じである。すなわち、設問 1. の光が進んだ時間は t_1 であり、設問 2. の光が進んだ時間は t_2 である。

したがって、 ${c_1}'$ は

$$\begin{aligned} {c_1}' &= \frac{x_0}{t_1} \\ &= \frac{x_0}{\dfrac{x_0}{c+V}} \\ &= c+V \end{aligned}$$

${c_2}'$ は

$$\begin{aligned} {c_2}' &= \frac{x_0}{t_2} \\ &= \frac{x_0}{\dfrac{x_0}{c-V}} \\ &= c-V \end{aligned}$$

である。

4. 設問 4. 5. 6. の状況を図 4 に示す。

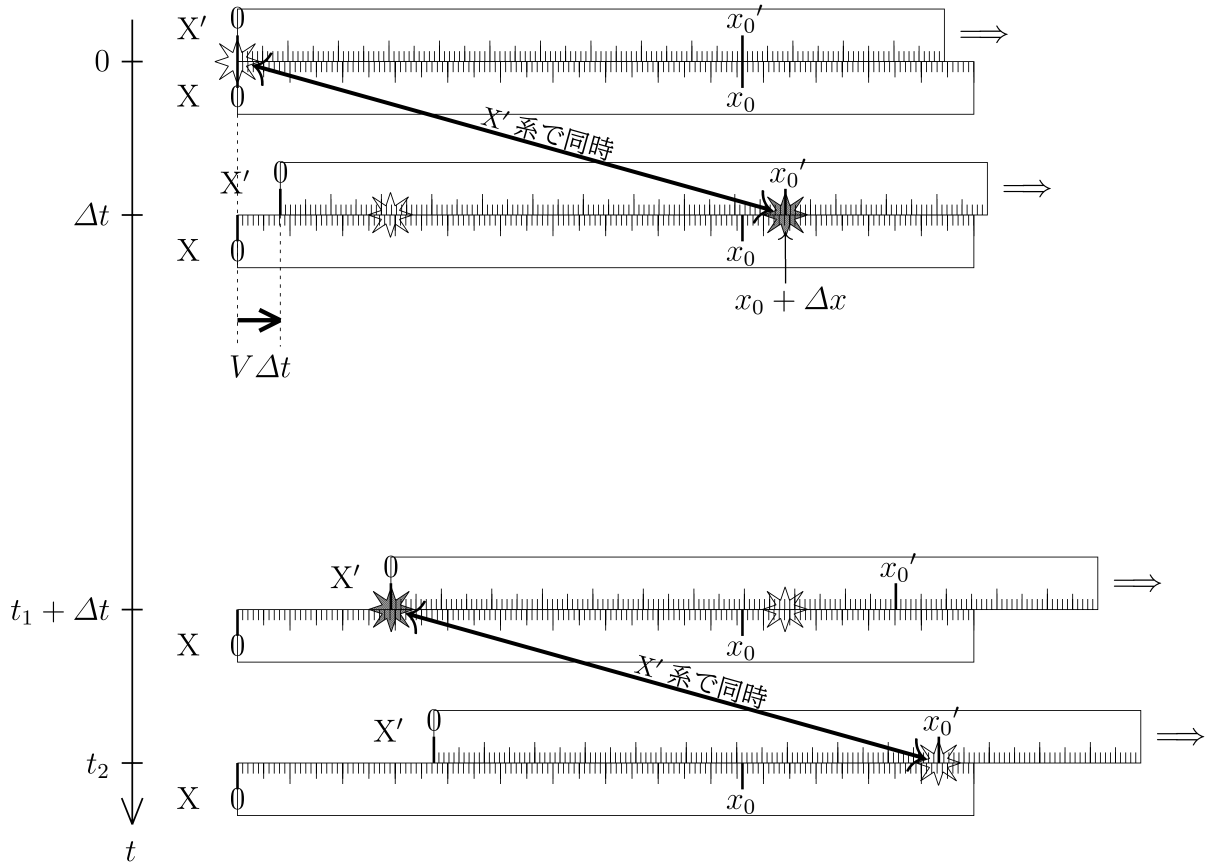

図　4

$x' = 0$ の位置と $x' = x_0{}'$ の位置を X′ 系で同時に発光させるということは、 $x' = x_0{}'$ の位置の発光を $x' = 0$ の位置の発光に比べて（つまり 設問 1. 2. 3. の場合に比べて）X 系で Δt だけ後の時刻にするということである。

すると、 $x' = x_0{}'$ から出た光が $x' = 0$ の位置に到着するのも、 設問 1. 2. 3. の場合（ $t = t_1$ に到着）に比べて X 系で Δt だけ遅れ、 $t = t_1 + \Delta t$ になる。

2 つの光が $x' = x_0{}'$ の位置と $x' = 0$ の位置に到着するのが同時であるということは、 $x' = x_0{}'$ の位置への到着が $x' = 0$ の位置への到着より X 系で Δt だけ後の時刻になるということである。 $x' = x_0{}'$ の位置に光が到着する X 系の時刻は 設問 1. 2. 3. の場合と変わらず $t = t_2$ であるから、 $t = t_2$ は $t = t_1 + \Delta t$ よりも X 系で Δt だけ後の時刻である。すなわち

$$t_2 = t_1 + \Delta t + \Delta t$$

が成り立つ。

これより

$$\Delta t = \frac{1}{2}\,(\,t_2 - t_1\,)$$

(47) 式と (48) 式を代入して

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x_0}{c-V} - \frac{x_0}{c+V}\right)$$

$$= \frac{V}{c^2 - V^2}\,x_0 \tag{49}$$

を得る。

5. 図 4 からわかるように、 $x' = {x_0}'$ の目盛りは、X 系で $t = 0$ から $t = \mathit{\Delta} t$ までの間に $V\,\mathit{\Delta} t$ だけ動く。よって

$$\begin{aligned} \mathit{\Delta} x &= V\,\mathit{\Delta} t \\ &= \frac{V^2}{c^2 - V^2}\,x_0 \end{aligned} \tag{50}$$

である。

6. α を L に依存せず $|V|$ だけに依存して決まる定数とし、問題文の L と L' の間には $L' = \alpha\,L$ という関係が成り立つと考える。

棒 A が物差し X′ に固定されていて、左端が $x' = 0$ 、右端が $x' = {x_0}'$ の目盛りと重なっているとする。

棒 A の長さは、同一の時刻における棒 A の両端の座標の差である。

X′ 系では、棒 A の両端の座標は時刻によらず一定である。ゆえに、X′ 系での棒 A の長さは、左端の 座標 $x' = 0$ と右端の 座標 $x' = {x_0}'$ の 差 ${x_0}'$ である。X′ 系は、棒 A が静止して見える座標系である。

いっぽう、X 系での棒 A の長さは、 $t = 0$ における左端の 座標 $x = 0$ と右端の 座標 $x = x_0$ の 差 x_0 である。X 系は、棒 A に対して 速さ $|V|$ で長さ方向に運動する座標系である。

問題文の L と L' の間に $L' = \alpha\,L$ の関係があるから、以上より

$$x_0 = \alpha\,{x_0}' \tag{51}$$

が成り立つ。

棒 B が物差し X に固定されていて、左端が $x = 0$ 、右端が $x = x_0 + \mathit{\Delta} x$ の目盛りと重なっているとする。

棒 B の長さは、同一の時刻における棒 B の両端の座標の差である。

X 系では、棒 B の両端の座標は時刻によらず一定である。ゆえに、X 系での棒 B の長さは、左端の 座標 $x = 0$ と右端の 座標 $x = x_0 + \mathit{\Delta} x$ の 差 $x_0 + \mathit{\Delta} x$ である。X 系は、棒 B が静止して見える座標系である。

いっぽう、X′ 系での棒 B の長さは、 $t' = 0$ における左端の 座標 $x' = 0$ と右端の 座標 $x' = {x_0}'$ の 差 ${x_0}'$ である。X′ 系は、棒 B に対して 速さ $|V|$ で長さ方向に運動する座標系である。

問題文の L と L' の間に $L' = \alpha\,L$ の関係があるから、以上より

$${x_0}' = \alpha\,(\,x_0 + \mathit{\Delta} x\,) \tag{52}$$

が成り立つ。(52) 式の α は (51) 式の α と同じ値である。

(51) 式と (52) 式がともに成り立つので、これらを連立方程式として解くと

$${x_0}' = \sqrt{x_0\,(\,x_0 + \mathit{\Delta} x\,)}$$

を得る。(50) 式を代入すると

$${x_0}' = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}\,x_0 \tag{53}$$

が導かれる。

(53) 式の物理的な意味を考える。

$V < c$ を前提とすると、(53) 式は、つねに ${x_0}' > x_0$ であることを示すから、 速さ $|V|$ で長さ方向に運動する状態で測った棒の長さが静止している状態で測った棒の長さよりも短いことを意味している。

つまり、「運動する物体は縮む」ということを表していると考えられる。

7. まず、 t_3 を x_0 , V , c で表す式を導く。

図 4 からもわかるように、 $t' = 0$ すなわち $t = \mathit{\Delta} t$ に $x' = {x_0}'$ から出た光は、 $x = 0$ の位置まで、X 系で $x_0 + \mathit{\Delta} x$ だけの距離を進む。光の速さは c であるから、それには、X 系で $\dfrac{x_0 + \mathit{\Delta} x}{c}$ だけの時間がかかる。したがって

$$t_3 \quad = \quad \mathit{\Delta} t + \frac{x_0 + \mathit{\Delta} x}{c}$$

(49) 式と (50) 式を代入して

$$\begin{aligned} &= \frac{V}{c^2 - V^2}\, x_0 + \frac{1}{c}\left(x_0 + \frac{V^2}{c^2 - V^2}\, x_0 \right) \\ &= \frac{1}{c - V}\, x_0 \end{aligned} \tag{54}$$

である。

次に、 ${t_3}'$ を x_0 , V , c で表す式を導く。

$x = 0$ の点は、X$'$ 系では、 $t' = 0$ に $x' = 0$ にあり、 速度 $-V$ で運動する。光は、 $t' = 0$ に $x' = {x_0}'$ から出て、 速度 $-c$ で $x = 0$ の点を追いかけて進む。光が $x = 0$ の点に追いつく X$'$ 系の時刻が ${t_3}'$ である。

X$'$ 系で、 $t' = 0$ から $t' = {t_3}'$ までの間に、光は負の向きに 距離 $c\, {t_3}'$ だけ、 $x = 0$ の点は負の向きに 距離 $V\, {t_3}'$ だけ進み、これらの距離の差が ${x_0}'$ に等しい。つまり

$$c\, {t_3}' - V\, {t_3}' = {x_0}'$$

が成り立つ。これより

$${t_3}' \quad = \quad \frac{{x_0}'}{c - V}$$

(53) 式を代入して

$$= \frac{1}{(\, c - V\,)\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}\, x_0 \tag{55}$$

である。

最後に、(54) 式と (55) 式を比較して、 ${t_3}'$ を t_3 , V , c で表す式を導く。

(54) 式より

$$x_0 = (\, c - V\,)\, t_3$$

である。これを (55) 式に代入すると

$${t_3}' = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}\, t_3 \tag{56}$$

を得る。

(56) 式の物理的な意味を考える。

$x = 0$ の位置で起こる 2 つの事象があり、その時間間隔を、事象の起こる点が静止して見えるように一緒に運動する時計で測った値が t_3 、事象の起こる点とは無関係な運動状態の時計で測った値が ${t_3}'$ である。

$V < c$ を前提とすると、(56) 式は、つねに ${t_3}' > t_3$ であることを示すから、事象と一緒に運動する時計で測った時間間隔のほうが短い、言い換えれば、そちらの時計のほうが遅く進むことを意味している。

つまり、「運動する時計は遅れる」ということを表していると考えられる。

2 相対性原理

2.1 Maxwell 方程式と真空中の光速

Maxwell 方程式は、電場を $\boldsymbol{E}$ 、磁場を $\boldsymbol{H}$ 、電束密度を $\boldsymbol{D}$ 、磁束密度を $\boldsymbol{B}$ 、電荷密度を ρ 、電流密度を $\boldsymbol{j}$ として

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{57}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = +\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{j} \tag{58}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \tag{59}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{60}$$

である。ただし、真空の誘電率を ε_0 、真空の透磁率を μ_0 として、真空中で

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D} &= \varepsilon_0\, \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{B} &= \mu_0\, \boldsymbol{H} \end{aligned}$$

が成り立つ。

これらの方程式から、真空中で成り立つ 波動方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} &= \frac{1}{\varepsilon_0\, \mu_0} \nabla^2 \boldsymbol{E} \\ \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} &= \frac{1}{\varepsilon_0\, \mu_0} \nabla^2 \boldsymbol{H} \end{aligned}$$

が導かれる。この方程式の解は、 速さ $c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\, \mu_0}}$ で伝わる電磁波である。この c の値は、真空中の光速の測定値とぴったり一致する。

このように、Maxwell 方程式から電磁波の存在が導かれる。

ここで、電磁波の 速さ c が Maxwell 方程式に現れる定数だけから定まる定数であることは注目に値する。

このことは、Maxwell 方程式が成り立ちさえすれば物理的な状況とは無関係に電磁波の速さが定数であることを意味するので、互いに運動する 2 人の観測者がいるとき、Maxwell 方程式がどちらの観測者にとっても成り立つ普遍的な物理法則であるならば、2 人は同じ電磁波の速さを観測することになる。

だが、それは、Galilei 変換と矛盾する。

Galilei 変換の速度の合成則によれば、電磁波の速さは、観測者の運動状態によって、変化するはずである。

そのような結果が得られるためには、2 人の観測者のうち少なくとも一方にとって Maxwell 方程式は成り立たないと考えなければならない。つまり、Galilei 変換と矛盾しないためには、Maxwell 方程式は 1 つの特別な座標系でしか成り立たない物理法則だと考える必要があるのである。その特別な座標系こそ、絶対静止系に違いないと考えられる。

しかし、Michelson-Morley の実験の結果を考慮に入れると、「Maxwell 方程式は絶対静止系でだけ成り立つ物理法則だ」という論考は誤りであろうと思われる。Maxwell 方程式をどの観測者にとっても成り立つ普遍的な物理法則と考えることで、光速度不変の原理が自然に導かれ、この実験の結果を綺麗に説明できるからである。物理法則は普遍的であるほうが、単純で美しい。絶対静止系などという特別な座標系の存在を仮定する必要がないというのも、望ましいことである。

このように考えると、Einstein の特殊相対性原理の概念に辿りつく。

2.2 相対性原理

Einstein は、それまでの物理学の前提である**絶対時間**と**絶対空間**の存在を否定し、**時間の相対性**と**空間の相対性**を前提として、それまでの物理学の法則に代わって成り立つ物理法則を探した。その際に、新たな物理法則に課すべき最も重要な条件として、Lorentz 変換が成り立つ前提の下で**相対性原理**に従うことを要請した。この要請を、**Einstein の特殊相対性原理**と呼ぶ。

慣性系

Galilei 変換が成り立つ前提の下で Newton 力学の基本法則が成り立つ座標系を、**慣性系**と呼ぶ。

ある慣性系に対して等速度運動する座標系は、やはり慣性系である。このことは、慣性系 S と、S 系に対して 速度 $\boldsymbol{V}$ で等速度運動する座標系 S′ とを考えたときに、S 系で成り立つ Newton の運動方程式

$$m\,\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{F}$$

（ m は質点の質量、 $\boldsymbol{r}$ は質点の位置の S 系での座標、 t は時刻、 $\boldsymbol{F}$ は質点にはたらく力）に、S 系と S′ 系の間の Galilei 変換

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{V}\,t$$

（ $\boldsymbol{r}'$ は質点の位置の S′ 系での座標）を代入すると

$$m\,\frac{d^2\boldsymbol{r}'}{dt^2} = \boldsymbol{F}$$

という同じ形の運動方程式が得られることによって示される。

慣性系に対して加速度運動する座標系や回転する座標系は、非慣性系である。たとえば、S 系に対して 加速度 $\boldsymbol{A}$ で加速度運動する座標系 S″ では

$$m\,\frac{d^2\boldsymbol{r}''}{dt^2} = \boldsymbol{F} - m\,\boldsymbol{A}$$

（ $\boldsymbol{r}''$ は質点の位置の S″ 系での座標）という運動方程式が成り立つ。これは、Newton の運動方程式とは異なる形である。つまり、S″ 系では Newton 力学の基本法則が成り立たないので、S″ 系は慣性系ではない。

相対性原理

静止している座標系 S_0 を考えることができるとすると、S_0 系は座標系のうちで最も基本的なものと考えてよいであろう。最も基本的な座標系が慣性系であるのは自明であり、他の慣性系は、S_0 系に対して等速度運動する座標系として定まるのだと理解できる。

しかし、S_0 系は本当に静止しているのだろうか。S_0 系に対して 速度 $\boldsymbol{V}$ で等速度運動する座標系 S_1 があるとして、いったい、S_1 系が静止していて S_0 系が 速度 $-\boldsymbol{V}$ で等速度運動しているのではないと、なぜ言えるのだろう。

S_0 系と S_1 系では同じ力学の基本法則が成り立つから、2 つの座標系から世界は同じように見え、どちらか一方をより基本的な性質を持ったものとして区別することは、できないはずである。つまり、S_0 系と S_1 系のどちらが静止しているかを区別することは、できない。どちらが静止していても同じ力学が成り立つから、区別する必要もない。

したがって、次を、物理学の基本原理と考えることができる。

すべての慣性系は対等である。唯一の基本的な座標系と考えられるような絶対静止系は、存在しない。

これは、次と等価である。

物理法則はすべての慣性系において同じ形をとる。

これらを、**相対性原理**と呼ぶ。

Galilei の相対性原理

Galilei 変換が成り立つ前提の下で物理法則が相対性原理に従うことを、**Galilei の相対性原理**と呼ぶ。

問題 7

電場を $\boldsymbol{E}$ 、磁場を $\boldsymbol{H}$ 、電束密度を $\boldsymbol{D}$ 、磁束密度を $\boldsymbol{B}$ 、電荷密度を ρ 、電流密度を $\boldsymbol{j}$ とする。真空の誘電率を ε_0 、真空の透磁率を μ_0 とする。

真空中で、 $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{D}$ 、 $\boldsymbol{H}$ と $\boldsymbol{B}$ の間には

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \tag{61}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H} \tag{62}$$

が成り立つ。

Maxwell 方程式は

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{63}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = +\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{j} \tag{64}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \tag{65}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{66}$$

である。

1. 電荷と電流が存在しない真空中で $\boldsymbol{E}$ が満たすべき波動方程式を、Maxwell 方程式から導け。
2. 前問で導いた波動方程式から、 $\boldsymbol{E}$ の波（電磁波）が真空中を伝わる 速さ c を求めよ。
3. $\varepsilon_0 = 8.8541878128 \times 10^{-12}\,\mathrm{F/m}$ 、 $\mu_0 = 1.25663706212 \times 10^{-6}\,\mathrm{N/A^2}$ である。これを前問で求めた c に代入して、真空中の光速を数値で求めよ。

問題 7 の答

1. (63) 式に (62) 式を代入し、両辺を μ_0 で割ると

$$\frac{1}{\mu_0}\,\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}$$

となる。この式の両辺の回転をとると

$$\frac{1}{\mu_0}\,\nabla\times\Big(\nabla\times\boldsymbol{E}\Big)=-\nabla\times\left(\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}\right)$$

となる。 演算子 ∇ の性質により $\nabla\times\Big(\nabla\times\boldsymbol{E}\Big)=\Big(\nabla\Big(\nabla\cdot\boldsymbol{E}\Big)-\triangle\boldsymbol{E}\Big)$ が成り立つ（ $\triangle$ は**ラプラシアン**、すなわち $\triangle=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ ）ことを使うと、この式を

$$\frac{1}{\mu_0}\Big(\nabla\Big(\nabla\cdot\boldsymbol{E}\Big)-\triangle\boldsymbol{E}\Big)=-\frac{\partial}{\partial t}\Big(\nabla\times\boldsymbol{H}\Big)$$

と変形できる。この式に、(61) 式と (65) 式を合わせた $\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ という式および (64) 式を代入し、なおかつ、電荷と電流が存在しないという条件（ $\rho=0$ 、 $\boldsymbol{j}=\boldsymbol{0}$ ）を考慮すると

$$-\frac{1}{\mu_0}\,\triangle\boldsymbol{E}=-\frac{\partial^2\boldsymbol{D}}{\partial t^2}$$

が得られる。この式に (61) 式を代入し、両辺を ε_0 で割ると

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=\frac{1}{\varepsilon_0\,\mu_0}\,\triangle\boldsymbol{E} \tag{67}$$

が導かれる。これは波動方程式である。

2. 一般に、 速さ c で伝わる波を解に持つ波動方程式は、波として伝わる物理量を f として

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=c^2\,\triangle f \tag{68}$$

と表せる。

(67) 式と (68) 式を比較すると、 $c^2=\dfrac{1}{\varepsilon_0\,\mu_0}$ であることがわかる。ゆえに

$$c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0}}$$

である。

3. $\varepsilon_0=8.8541878128\times10^{-12}\,\mathrm{F/m}$ および $\mu_0=1.25663706212\times10^{-6}\,\mathrm{N/A^2}$ を代入すると

$$c=2.9979245800\times10^{8}\,\mathrm{m/s}$$

を得る。真空中の光速の定義値に一致する。

問題 8

座標系 S (t, x, y, z) から、S 系に対して 速度 $\begin{pmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ で運動する 座標系 S′ (t', x', y', z') への Galilei 変換を考える。

電場を $\boldsymbol{E}$ 、磁場を $\boldsymbol{H}$ 、電束密度を $\boldsymbol{D}$ 、磁束密度を $\boldsymbol{B}$ 、電荷密度を ρ 、電流密度を $\boldsymbol{j}$ とする。真空の誘電率を ε_0 、真空の透磁率を μ_0 とする。

真空中で、 $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{D}$ 、 $\boldsymbol{H}$ と $\boldsymbol{B}$ の間には

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \tag{69}$$
$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H} \tag{70}$$

が成り立つ。

Maxwell 方程式

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{71}$$
$$\nabla \times \boldsymbol{H} = +\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{j} \tag{72}$$
$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \tag{73}$$
$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{74}$$

が、Galilei 変換によってどのような形になるかを導こう。

時刻と位置の任意の 関数 f の S 系での 偏微分 $\dfrac{\partial f}{\partial t}, \dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z}$ は、 f を t, x, y, z の関数とみなしてこの 4 つの変数のうち 3 つを定数とした場合の残りの 1 つに対する偏微分係数であり、S′ 系での 偏微分 $\dfrac{\partial f}{\partial t'}, \dfrac{\partial f}{\partial x'}, \dfrac{\partial f}{\partial y'}, \dfrac{\partial f}{\partial z'}$ は、同じ f を t', x', y', z' の関数とみなしてこの 4 つの変数のうち 3 つを定数とした場合の残りの 1 つに対する偏微分係数である。

1. 時刻と位置の任意の 関数 f に対する $\dfrac{\partial f}{\partial t}, \dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z}$ を $\dfrac{\partial f}{\partial t'}, \dfrac{\partial f}{\partial x'}, \dfrac{\partial f}{\partial y'}, \dfrac{\partial f}{\partial z'}, V$ で表せ。
2. 前問の結論を使って (71) 式、(72) 式、(73) 式、(74) 式を変形し、 $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{B}$ の S′ 系での偏微分と ρ, $\boldsymbol{j}$, V による表現を導け。 $\nabla' = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x'} \\ \dfrac{\partial}{\partial y'} \\ \dfrac{\partial}{\partial z'} \end{pmatrix}$ とし、 ∇' を用いて表記せよ。
3. Maxwell 方程式は Galilei 変換を行うと形が変わることを説明せよ。

問題 8 の答

1. t', x', y', z' を t, x, y, z の関数とみなして t, x, y, z のうち 3 つを定数とした場合の残りの 1 つに対する偏微分係数を

$$\frac{\partial t'}{\partial t}, \frac{\partial t'}{\partial x}, \frac{\partial t'}{\partial y}, \frac{\partial t'}{\partial z}, \frac{\partial x'}{\partial t}, \frac{\partial x'}{\partial x}, \frac{\partial x'}{\partial y}, \frac{\partial x'}{\partial z}, \frac{\partial y'}{\partial t}, \frac{\partial y'}{\partial x}, \frac{\partial y'}{\partial y}, \frac{\partial y'}{\partial z}, \frac{\partial z'}{\partial t}, \frac{\partial z'}{\partial x}, \frac{\partial z'}{\partial y}, \frac{\partial z'}{\partial z}$$

とする。これら 16 個 の偏微分係数は、S 系と S$'$ 系の間の Galilei 変換が

$$\begin{aligned} t' &= t \\ x' &= x - V\,t \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}$$

であることより、それぞれ

$$\begin{array}{llll} \dfrac{\partial t'}{\partial t} = 1 & \dfrac{\partial t'}{\partial x} = 0 & \dfrac{\partial t'}{\partial y} = 0 & \dfrac{\partial t'}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial x'}{\partial t} = -V & \dfrac{\partial x'}{\partial x} = 1 & \dfrac{\partial x'}{\partial y} = 0 & \dfrac{\partial x'}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial y'}{\partial t} = 0 & \dfrac{\partial y'}{\partial x} = 0 & \dfrac{\partial y'}{\partial y} = 1 & \dfrac{\partial y'}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial z'}{\partial t} = 0 & \dfrac{\partial z'}{\partial x} = 0 & \dfrac{\partial z'}{\partial y} = 0 & \dfrac{\partial z'}{\partial z} = 1 \end{array}$$

である。

よって

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial t} \\ &= \frac{\partial f}{\partial t'}\cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial x'}\cdot(-V\,) + \frac{\partial f}{\partial y'}\cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial z'}\cdot 0 \\ &= \frac{\partial f}{\partial t'} - V\,\frac{\partial f}{\partial x'} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial x} \\ &= \frac{\partial f}{\partial t'}\cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial x'}\cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y'}\cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial z'}\cdot 0 \\ &= \frac{\partial f}{\partial x'} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial y} \\ &= \frac{\partial f}{\partial t'}\cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial x'}\cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial y'}\cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial z'}\cdot 0 \\ &= \frac{\partial f}{\partial y'} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial z} \\ &= \frac{\partial f}{\partial t'}\cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial x'}\cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial y'}\cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial z'}\cdot 1 \\ &= \frac{\partial f}{\partial z'} \end{aligned}$$

である。

2. 第 1 に、(71) 式を変形する。 $\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$ とする。

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= \nabla \times \boldsymbol{E} \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial E_z}{\partial y} - \dfrac{\partial E_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial E_x}{\partial z} - \dfrac{\partial E_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

前問の結論を使って

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial E_z}{\partial y'} - \dfrac{\partial E_y}{\partial z'} \\ \dfrac{\partial E_x}{\partial z'} - \dfrac{\partial E_z}{\partial x'} \\ \dfrac{\partial E_y}{\partial x'} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y'} \end{pmatrix} \\
&= \nabla' \times \boldsymbol{E}
\end{aligned}
$$

$$
\text{右辺} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}
$$

前問の結論を使って

$$
\begin{aligned}
&= -\left(\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t'} - V \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial x'} \right) \\
&= -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t'} + V \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial x'}
\end{aligned}
$$

すなわち、 $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ の S$'$ 系での偏微分と V を用いて表すと、(71) 式は

$$
\nabla' \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t'} + V \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial x'}
$$

となる。

第 2 に、(72) 式を変形する。 $\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix}$ とする。

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= \nabla \times \boldsymbol{H} \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial H_z}{\partial y} - \dfrac{\partial H_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial H_x}{\partial z} - \dfrac{\partial H_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial H_y}{\partial x} - \dfrac{\partial H_x}{\partial y} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

前問の結論を使って

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial H_z}{\partial y'} - \dfrac{\partial H_y}{\partial z'} \\ \dfrac{\partial H_x}{\partial z'} - \dfrac{\partial H_z}{\partial x'} \\ \dfrac{\partial H_y}{\partial x'} - \dfrac{\partial H_x}{\partial y'} \end{pmatrix} \\
&= \nabla' \times \boldsymbol{H}
\end{aligned}
$$

$$
\text{右辺} = +\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{j}
$$

前問の結論を使って

$$
\begin{aligned}
&= +\left(\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t'} - V \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial x'} \right) + \boldsymbol{j} \\
&= +\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t'} - V \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial x'} + \boldsymbol{j}
\end{aligned}
$$

すなわち、 $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{D}$ の S' 系での偏微分と $\boldsymbol{j}$, V を用いて表すと、(72) 式は

$$
\nabla' \times \boldsymbol{H} = +\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t'} - V \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial x'} + \boldsymbol{j}
$$

となる。

第 3 に、(73) 式を変形する。

$$\begin{aligned}左辺 &= \nabla \cdot \boldsymbol{D} \\ &= \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}\end{aligned}$$

前問の結論を使って

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial D_x}{\partial x'} + \frac{\partial D_y}{\partial y'} + \frac{\partial D_z}{\partial z'} \\ &= \nabla' \cdot \boldsymbol{D}\end{aligned}$$

$$右辺 = \rho$$

すなわち、 $\boldsymbol{D}$ の S' 系での偏微分と ρ を用いて表すと、(73) 式は

$$\nabla' \cdot \boldsymbol{D} = \rho$$

となる。

第 4 に、(74) 式を変形する。

$$\begin{aligned}左辺 &= \nabla \cdot \boldsymbol{B} \\ &= \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}\end{aligned}$$

前問の結論を使って

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial B_x}{\partial x'} + \frac{\partial B_y}{\partial y'} + \frac{\partial B_z}{\partial z'} \\ &= \nabla' \cdot \boldsymbol{B}\end{aligned}$$

$$右辺 = 0$$

すなわち、 $\boldsymbol{B}$ の S' 系での偏微分を用いて表すと、(74) 式は

$$\nabla' \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

となる。

3. 前問の結論として

$$
\begin{aligned}
\nabla' \times \boldsymbol{E} &= -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t'} + V\,\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial x'} && (75)\\
\nabla' \times \boldsymbol{H} &= +\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t'} - V\,\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial x'} + \boldsymbol{j} && (76)\\
\nabla' \cdot \boldsymbol{D} &= \rho && (77)\\
\nabla' \cdot \boldsymbol{B} &= 0 && (78)
\end{aligned}
$$

が得られた。

S′ 系での電場・磁場・電束密度・磁束密度・電荷密度・電流密度をそれぞれ $\boldsymbol{E}'$, $\boldsymbol{H}'$, $\boldsymbol{D}'$, $\boldsymbol{B}'$, ρ', $\boldsymbol{j}'$ として、(75) (76) (77) (78) 式を $\boldsymbol{E}'$, $\boldsymbol{H}'$, $\boldsymbol{D}'$, $\boldsymbol{B}'$ の S′ 系での偏微分および ρ', $\boldsymbol{j}'$, V による表現にさらに変形すれば、それが、S′ 系での電磁場の基本方程式、すなわち、Maxwell 方程式を Galilei 変換したものである。

そして、それが S 系での Maxwell 方程式（ (71) (72) (73) (74) 式）と同じ形であるなら、Maxwell 方程式は Galilei 変換を行っても形が変わらないことになる。

そうであるかどうかを調べたい。しかし、まだ、 $\boldsymbol{E}'$, $\boldsymbol{H}'$, $\boldsymbol{D}'$, $\boldsymbol{B}'$, ρ', $\boldsymbol{j}'$ が $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{B}$, ρ, $\boldsymbol{j}$ とどのような関係にあるのかがわかっていない。

そこで、ここでは、Galilei 変換によって Maxwell 方程式の形が変わらないために $\boldsymbol{E}'$, $\boldsymbol{H}'$, $\boldsymbol{D}'$, $\boldsymbol{B}'$, ρ', $\boldsymbol{j}'$ と $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{B}$, ρ, $\boldsymbol{j}$ の間にどのような関係が必要か、を考えてみる。

$\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{j}$ と同様に、 $'$ のついたベクトルの各成分も、 x, y, z の添字をつけた文字で表す。

(75) 式・(78) 式については

$$
\left\{
\begin{array}{lll}
{E_x}' = E_x & {E_y}' = E_y - V\,B_z & {E_z}' = E_z + V\,B_y \\
{B_x}' = B_x & {B_y}' = B_y & {B_z}' = B_z
\end{array}
\right\} \tag{79}
$$

であれば

$$
\begin{aligned}
&(75)\text{ 式を変形して} \quad & \nabla' \times \boldsymbol{E}' &= -\frac{\partial \boldsymbol{B}'}{\partial t'}\\
&(78)\text{ 式を変形して} \quad & \nabla' \cdot \boldsymbol{B}' &= 0
\end{aligned}
$$

と、(71) 式・(74) 式と同じ形の式が得られる。

(76) 式・(77) 式については

$$
\left\{
\begin{array}{lll}
{H_x}' = H_x & {H_y}' = H_y + V\,D_z & {H_z}' = H_z - V\,D_y \\
{D_x}' = D_x & {D_y}' = D_y & {D_z}' = D_z \\
\rho' = \rho & & \\
{j_x}' = j_x - V\,\rho & {j_y}' = j_y & {j_z}' = j_z
\end{array}
\right\} \tag{80}
$$

であれば

$$
\begin{aligned}
&(76)\text{ 式を変形して} \quad & \nabla' \times \boldsymbol{H}' &= +\frac{\partial \boldsymbol{B}'}{\partial t'} + \boldsymbol{j}'\\
&(77)\text{ 式を変形して} \quad & \nabla' \cdot \boldsymbol{D}' &= \rho'
\end{aligned}
$$

と、(72) 式・(73) 式と同じ形の式が得られる。

これらより、条件 (79) と条件 (80) の両方が成り立っているならば、Maxwell 方程式は Galilei 変換を行っても形が変わらないことになる。

しかし、(69) 式と (70) 式を考慮すると、条件 (79) と条件 (80) とは矛盾しており、両方が成り立つことはないことがわかる。

したがって、(75) (76) (77) (78) 式を $\boldsymbol{E}'$, $\boldsymbol{H}'$, $\boldsymbol{D}'$, $\boldsymbol{B}'$ の S′ 系での偏微分および ρ', $\boldsymbol{j}'$, V による表現に変形して、S 系での Maxwell 方程式と同じ形の式になることはない。

ゆえに、Maxwell 方程式は Galilei 変換を行うと形が変わる、と言える。

問題 9

座標系 S (t,x,y,z) から、S 系に対して 速度 $\begin{pmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ で運動する 座標系 S′ (t',x',y',z') への Galilei 変換を考える。

質点の質量を m 、質点にはたらく力を $\boldsymbol{F}$ とする。

S 系での質点の位置の座標を $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ 、S′ 系での質点の位置の座標を $\boldsymbol{r}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ とする。

S 系での質点の速度を $\boldsymbol{v} = \dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ 、S′ 系での質点の速度を $\boldsymbol{v}' = \dfrac{d\boldsymbol{r}'}{dt'}$ とする。

S 系での質点の加速度を $\boldsymbol{a} = \dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt}$ 、S′ 系での質点の加速度を $\boldsymbol{a}' = \dfrac{d\boldsymbol{v}'}{dt'}$ とする。

Newton の運動方程式

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{F} \tag{81}$$

が、Galilei 変換によってどのような形になるかを導こう。

1. $\boldsymbol{v}$ の各成分を、 $\boldsymbol{v}'$ の各成分と V で表せ。
2. $\boldsymbol{a}$ の各成分を、 $\boldsymbol{a}'$ の各成分で表せ。
3. Newton の運動方程式を変形し、 $\dfrac{d^2\boldsymbol{r}'}{dt'^2}$ と m , $\boldsymbol{F}$ による表現を導け。
4. Newton の運動方程式は Galilei 変換を行っても形が変わらないことを説明せよ。

問題 9 の答

1. $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$ 、 $\boldsymbol{v}' = \begin{pmatrix} {v_x}' \\ {v_y}' \\ {v_z}' \end{pmatrix}$ とする。 $v_x = \dfrac{dx}{dt}$ 、 $v_y = \dfrac{dy}{dt}$ 、 $v_z = \dfrac{dz}{dt}$ 、 ${v_x}' = \dfrac{dx'}{dt'}$ 、 ${v_y}' = \dfrac{dy'}{dt'}$ 、 ${v_z}' = \dfrac{dz'}{dt'}$ である。

S 系と S′ 系の間の Galilei 変換は

$$\begin{aligned} t' &= t \qquad (82) \\ x' &= x - V\,t \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}$$

である。これを t, x, y, z について解くと

$$\begin{aligned} t &= t' \\ x &= x' + V\,t' \qquad (83) \\ y &= y' \qquad (84) \\ z &= z' \qquad (85) \end{aligned}$$

である。

第 1 に、質点の運動状態を表す任意の量（いずれかの座標系での位置、速度、加速度など） f の、S 系の時間に対する 変化率 $\dfrac{df}{dt}$ と S′ 系の時間に対する 変化率 $\dfrac{df}{dt'}$ の間の関係を導いておく。

質点の運動状態を表す量は、時刻だけの関数と考えられるから

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dt'}\,\frac{dt'}{dt} \qquad (86)$$

が成り立つ。ここで、 $\dfrac{dt'}{dt}$ は、無限に近い 2 つの点の間を質点が移動するのにかかる、S 系と S′ 系の時間の比である。

(82) 式より

$$\frac{dt'}{dt} = 1 \qquad (87)$$

である。

(87) 式を (86) 式に代入すると

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dt'} \qquad (88)$$

が導かれる。

第 2 に、 v_x を表す式を導く。

$$v_x = \frac{dx}{dt}$$

(83) 式を代入して

$$= \frac{dx'}{dt} + V$$

(88) 式の f を x' に置き換えた式を代入して

$$\begin{aligned} &= \frac{dx'}{dt'} + V \\ &= {v_x}' + V \end{aligned} \tag{89}$$

を得る。

第 3 に、 v_y を表す式を導く。

$$v_y = \frac{dy}{dt}$$

(84) 式を代入して

$$= \frac{dy'}{dt}$$

(88) 式の f を y' に置き換えた式を代入して

$$\begin{aligned} &= \frac{dy'}{dt'} \\ &= {v_y}' \end{aligned} \tag{90}$$

を得る。

第 4 に、 v_z を表す式を導く。

(85) 式と、(88) 式の f を z' に置き換えた式を使って、 v_y を表す式を導いたのと同様に

$$v_z = {v_z}' \tag{91}$$

を得る。

2. $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ 、 $\boldsymbol{a}' = \begin{pmatrix} a_x{}' \\ a_y{}' \\ a_z{}' \end{pmatrix}$ とする。 $a_x = \dfrac{dv_x}{dt}$ 、 $a_y = \dfrac{dv_y}{dt}$ 、 $a_z = \dfrac{dv_z}{dt}$ 、 $a_x{}' = \dfrac{dv_x{}'}{dt'}$ 、 $a_y{}' = \dfrac{dv_y{}'}{dt'}$ 、 $a_z{}' = \dfrac{dv_z{}'}{dt'}$ である。

第 1 に、 a_x を表す式を導く。

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}$$

(88) 式の f を v_x に置き換えた式を代入して

$$= \frac{dv_x}{dt'}$$

(89) 式を代入して

$$\begin{aligned} &= \frac{d}{dt'}\left(v_x{}' + V\right) \\ &= \frac{dv_x{}'}{dt'} \\ &= a_x{}' \end{aligned}$$

を得る。

第 2 に、 a_y を表す式を導く。

$$a_y = \frac{dv_y}{dt}$$

(88) 式の f を v_y に置き換えた式を代入して

$$= \frac{dv_y}{dt'}$$

(90) 式を代入して

$$\begin{aligned} &= \frac{dv_y{}'}{dt'} \\ &= a_y{}' \end{aligned}$$

を得る。

第 3 に、 a_z を表す式を導く。

(88) 式の f を v_z に置き換えた式と、(91) 式を使って、 a_y を表す式を導いたのと同様に

$$a_z = a_z{}'$$

を得る。

3. 前問の結論より

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' \tag{92}$$

であることが導かれる。

$\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{a}$ であるから、(81) 式は、すなわち

$$m\,\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$$

である。

この式に (92) 式を代入すると

$$m\,\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{F}$$

となる。 $\boldsymbol{a}' = \dfrac{d\boldsymbol{v}'}{dt'} = \dfrac{d^2\boldsymbol{r}'}{dt'^2}$ であるから、すなわち

$$m\,\frac{d^2\boldsymbol{r}'}{dt'^2} = \boldsymbol{F} \tag{93}$$

である。

(93) 式が、Newton の運動方程式（ (81) 式）を $\dfrac{d^2\boldsymbol{r}'}{dt'^2}$ と m , $\boldsymbol{F}$ による表現に変形した式である。

4. Galilei 変換を考える場合には、経験則より、質点の質量および質点が受ける力は 2 つの座標系で等しいと考えるので、(93) 式の m は S' 系での質点の質量、 $\boldsymbol{F}$ は S' 系での質点が受ける力と考えてよい。

よって、(93) 式が、S' 系での運動方程式、すなわち、Newton の運動方程式を Galilei 変換したものである。

S 系での Newton の運動方程式（ (81) 式）と S' 系での運動方程式（ (93) 式）とを比較すると、同じ形をしている。

ゆえに、Newton の運動方程式は Galilei 変換を行っても形が変わらない、と言える。

2.3 Newton 力学

Newton 力学の基本法則のうち第 1 法則と第 2 法則は、Newton の運動方程式で表される。

座標系 S (t, x, y, z) と、S 系に対して 速度 $\begin{pmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ で運動する 座標系 S′ (t', x', y', z') を考える。Lorentz 変換が成り立つとする。

質点の質量を m 、質点の位置の S 系での座標を $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ 、S′ 系での座標を $\boldsymbol{r}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ とし、質点にはたらく力を $\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$ とする。真空中の光速を c とし、 $\beta = \dfrac{V}{c}$ 、 $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ とする。

S 系で Newton の運動方程式が成り立つとする。すなわち

$$m\,\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{F} \tag{94}$$

が成り立つ。

S′ 系での運動方程式は、S 系での Newton の運動方程式に、Lorentz 逆変換の式（ (12) 式・(13) 式・(14) 式・(15) 式を x , y , z について解いた式）と、 t での微分を t' での微分を用いて表す式とを代入することによって得られる。その結果は

$$m \cdot \frac{1}{\gamma^3\left(1+\dfrac{\beta}{c}\cdot\dfrac{dx'}{dt'}\right)^3}\cdot\frac{d^2x'}{dt'^2} = F_x \tag{95}$$

$$m \cdot \frac{1}{\gamma^2\left(1+\dfrac{\beta}{c}\cdot\dfrac{dx'}{dt'}\right)^3}\left(\frac{d^2y'}{dt'^2}+\frac{\beta}{c}\cdot\frac{dx'}{dt'}\cdot\frac{d^2y'}{dt'^2}-\frac{\beta}{c}\cdot\frac{dy'}{dt'}\cdot\frac{d^2x'}{dt'^2}\right) = F_y \tag{96}$$

$$m \cdot \frac{1}{\gamma^2\left(1+\dfrac{\beta}{c}\cdot\dfrac{dx'}{dt'}\right)^3}\left(\frac{d^2z'}{dt'^2}+\frac{\beta}{c}\cdot\frac{dx'}{dt'}\cdot\frac{d^2z'}{dt'^2}-\frac{\beta}{c}\cdot\frac{dz'}{dt'}\cdot\frac{d^2x'}{dt'^2}\right) = F_z \tag{97}$$

である。

(94) 式は座標の 2 階微分だけを含み、3 つの成分が同じ形であるが、(95) 式・(96) 式・(97) 式は、座標の 1 階微分と 2 階微分を含み、x' 成分と y' 成分・z' 成分とで形が異なる。したがって、S′ 系での運動方程式は、S 系での Newton の運動方程式とは異なる形である。

Lorentz 変換が成り立つ前提の下で、Newton 力学の基本法則は、慣性系によって異なる形をとる。つまり、Newton 力学は、Einstein の特殊相対性原理に従わないので、非普遍的で、正しい理論とは考えられない。

Newton 力学に代わる、Einstein の要請を満たすような普遍的な力学が、存在するはずである。

2.4 電磁気学

電磁気学の基本法則は、電磁場の基本方程式としての Maxwell 方程式である。

座標系 S (t, x, y, z) と、S 系に対して 速度 $\begin{pmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ で運動する 座標系 S′ (t', x', y', z') を考える。Lorentz 変換が成り立つとする。

S 系での電場を $\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$ 、磁場を $\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix}$ 、電束密度を $\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix}$ 、磁束密度を $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$ 、電荷密度を ρ 、電流密度を $\boldsymbol{j} = \begin{pmatrix} j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix}$ 、真空の誘電率を ε_0 、真空の透磁率を μ_0 、真空中の光速を c とする。

真空中で、 $\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\, \boldsymbol{E}$ 、 $\boldsymbol{B} = \mu_0\, \boldsymbol{H}$ が成り立つ。 $c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\, \mu_0}}$ が成り立つ。 $\beta = \dfrac{V}{c}$ 、 $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ とする。

S 系で Maxwell 方程式が成り立つとする。すなわち、(57) 式・(58) 式・(59) 式・(60) 式が成り立つ。

S′ 系での電磁場の基本方程式は、S 系での Maxwell 方程式に、 t , x , y , z での偏微分を t' , x' , y' , z' での偏微分を用いて表す式を代入することによって得られる。その結果は

$$
\begin{aligned}
{E_x}' &= E_x \\
{E_y}' &= \gamma\left(E_y - \beta\, c\, B_z\right) \\
{E_z}' &= \gamma\left(E_z + \beta\, c\, B_y\right) \\
{B_x}' &= B_x \\
{B_y}' &= \gamma\left(B_y + \frac{\beta}{c}\, E_z\right) \\
{B_z}' &= \gamma\left(B_z - \frac{\beta}{c}\, E_y\right)
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
{H_x}' &= H_x \\
{H_y}' &= \gamma\left(H_y + \beta\, c\, D_z\right) \\
{H_z}' &= \gamma\left(H_z - \beta\, c\, D_y\right) \\
{D_x}' &= D_x \\
{D_y}' &= \gamma\left(D_y - \frac{\beta}{c}\, H_z\right) \\
{D_z}' &= \gamma\left(D_z + \frac{\beta}{c}\, H_y\right)
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\rho' &= \gamma\left(\rho - \frac{\beta}{c}\, j_x\right) \\
{j_x}' &= \gamma\left(j_x - \beta\, c\, \rho\right) \\
{j_y}' &= j_y \\
{j_z}' &= j_z
\end{aligned}
$$

$$
\boldsymbol{E}' = \begin{pmatrix} {E_x}' \\ {E_y}' \\ {E_z}' \end{pmatrix} \qquad
\boldsymbol{H}' = \begin{pmatrix} {H_x}' \\ {H_y}' \\ {H_z}' \end{pmatrix} \qquad
\boldsymbol{D}' = \begin{pmatrix} {D_x}' \\ {D_y}' \\ {D_z}' \end{pmatrix} \qquad
\boldsymbol{B}' = \begin{pmatrix} {B_x}' \\ {B_y}' \\ {B_z}' \end{pmatrix} \qquad
\boldsymbol{j}' = \begin{pmatrix} {j_x}' \\ {j_y}' \\ {j_z}' \end{pmatrix} \qquad
\nabla' = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x'} \\ \dfrac{\partial}{\partial y'} \\ \dfrac{\partial}{\partial z'} \end{pmatrix}
$$

とすれば

$$\nabla' \times \boldsymbol{E}' = -\frac{\partial \boldsymbol{B}'}{\partial t'} \tag{98}$$

$$\nabla' \times \boldsymbol{H}' = +\frac{\partial \boldsymbol{D}'}{\partial t'} + \boldsymbol{j}' \tag{99}$$

$$\nabla' \cdot \boldsymbol{D}' = \rho' \tag{100}$$

$$\nabla' \cdot \boldsymbol{B}' = 0 \tag{101}$$

である。

(98) 式・(99) 式・(100) 式・(101) 式は、(57) 式・(58) 式・(59) 式・(60) 式のすべての文字を $'$ つきの同じ文字に置き換えた式になっている。したがって、 $\boldsymbol{E}'$, $\boldsymbol{H}'$, $\boldsymbol{D}'$, $\boldsymbol{B}'$, ρ' , $\boldsymbol{j}'$ が S′ 系での電場、磁場、電束密度、磁束密度、電荷密度、電流密度であれば、S′ 系での電磁場の基本方程式は S 系での Maxwell 方程式と同じ形であるといえる。

$\boldsymbol{E}'$, $\boldsymbol{H}'$, $\boldsymbol{D}'$, $\boldsymbol{B}'$, ρ' , $\boldsymbol{j}'$ を S′ 系での電場、磁場、電束密度、磁束密度、電荷密度、電流密度とすることは、経験と矛盾せず、間違いとは考えられない。そこで、これは、正しい考えとして、認めることにする。

Lorentz 変換が成り立つ前提の下で、電磁場の基本方程式は、すべての慣性系で同じ形をとる。つまり、電磁気学は、そのままで Einstein の特殊相対性原理に従うので、Einstein が求める普遍的な理論として相応しい。

電磁場の Lorentz 変換

S 系での電場、磁場、電束密度、磁束密度、電荷密度、電流密度と S′ 系でのそれらとの関係を、さらに明確にしよう。

そのために、まず、行列を利用して Maxwell 方程式を表現する。

S 系での Maxwell 方程式は、次のように表現することができる。すなわち、 **2 階のテンソル** $\tilde{F}\,,\,G$ （ここでは行列として表現する)、 横ベクトル $\boldsymbol{j}_4$ 、横ベクトルとして扱える 微分演算子 ∇_4 を

$$\tilde{F} = \begin{pmatrix} 0 & -\,B_x & -\,B_y & -\,B_z \\ B_x & 0 & \dfrac{1}{c}\,E_z & -\,\dfrac{1}{c}\,E_y \\ B_y & -\,\dfrac{1}{c}\,E_z & 0 & \dfrac{1}{c}\,E_x \\ B_z & \dfrac{1}{c}\,E_y & -\,\dfrac{1}{c}\,E_x & 0 \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} 0 & -\,c\,D_x & -\,c\,D_y & -\,c\,D_z \\ c\,D_x & 0 & -\,H_z & H_y \\ c\,D_y & H_z & 0 & -\,H_x \\ c\,D_z & -\,H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{j}_4 &= \begin{pmatrix} c\,\rho & j_x & j_y & j_z \end{pmatrix} \\ \nabla_4 &= \begin{pmatrix} \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial}{\partial t} & \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

として

$$\nabla_4\,\tilde{F} = \mathbf{0} \tag{102}$$

$$\nabla_4\,G = \boldsymbol{j}_4 \tag{103}$$

である。

$\tilde{F}$ は S 系での電場と磁束密度を、 G は S 系での磁場と電束密度を、 $\boldsymbol{j}_4$ は S 系での電荷密度と電流密度を表す行列および横ベクトルと理解することができる。

S′ 系での Maxwell 方程式は、次のように表現することができる。すなわち、 **2 階のテンソル** $\tilde{F}'\,,\,G'$ （ここでは行列として表現する)、 横ベクトル ${\boldsymbol{j}_4}'$ 、横ベクトルとして扱える 微分演算子 ${\nabla_4}'$ を

$$\tilde{F}' = \begin{pmatrix} 0 & -\,{B_x}' & -\,{B_y}' & -\,{B_z}' \\ {B_x}' & 0 & \dfrac{1}{c}\,{E_z}' & -\,\dfrac{1}{c}\,{E_y}' \\ {B_y}' & -\,\dfrac{1}{c}\,{E_z}' & 0 & \dfrac{1}{c}\,{E_x}' \\ {B_z}' & \dfrac{1}{c}\,{E_y}' & -\,\dfrac{1}{c}\,{E_x}' & 0 \end{pmatrix} \qquad G' = \begin{pmatrix} 0 & -\,c\,{D_x}' & -\,c\,{D_y}' & -\,c\,{D_z}' \\ c\,{D_x}' & 0 & -\,{H_z}' & {H_y}' \\ c\,{D_y}' & {H_z}' & 0 & -\,{H_x}' \\ c\,{D_z}' & -\,{H_y}' & {H_x}' & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} {\boldsymbol{j}_4}' &= \begin{pmatrix} c\,\rho' & {j_x}' & {j_y}' & {j_z}' \end{pmatrix} \\ {\nabla_4}' &= \begin{pmatrix} \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial}{\partial t'} & \dfrac{\partial}{\partial x'} & \dfrac{\partial}{\partial y'} & \dfrac{\partial}{\partial z'} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

として

$${\nabla_4}'\,\tilde{F}' = \mathbf{0} \tag{104}$$

$${\nabla_4}'\,G' = {\boldsymbol{j}_4}' \tag{105}$$

である。

$\tilde{F}'$ は S′ 系での電場と磁束密度を、 G' は S′ 系での磁場と電束密度を、 ${\boldsymbol{j}_4}'$ は S′ 系での電荷密度と電流密度を表す行列および横ベクトルと理解することができる。

次に、 $\tilde{F}\,,G\,,\boldsymbol{j}_4$ と $\tilde{F}'\,,G'\,,\boldsymbol{j}_4{}'$ の間の関係を、行列を利用して表現する。

Lorentz 変換を与える 行列 L を考える。

$$L=\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{106}$$

とする。 L は、(16) 式に現れる行列であり、縦ベクトルに左から掛けることでその縦ベクトルを Lorentz 変換する行列である。

L を用いると、 $\tilde{F}\,,G\,,\boldsymbol{j}_4$ と $\tilde{F}'\,,G'\,,\boldsymbol{j}_4{}'$ の間の関係を

$$\tilde{F}' = L\,\tilde{F}\,L \tag{107}$$

$$G' = L\,G\,L \tag{108}$$

$$\boldsymbol{j}_4{}' = \boldsymbol{j}_4\,L \tag{109}$$

と表すことができる。

横ベクトルに右から L を掛ける演算は、その横ベクトルを Lorentz 変換する演算である。なぜならば、縦ベクトルに左から L を掛けるとその縦ベクトルの Lorentz 変換が得られるということから、横ベクトルに右から L の 転置 ${}^tL$ を掛けるとその横ベクトルの Lorentz 変換が得られることが導かれ、さらに、(106) 式によれば ${}^tL=L$ だからである。

したがって、(109) 式から、 $\boldsymbol{j}_4{}'$ が $\boldsymbol{j}_4$ の Lorentz 変換であることがわかる。

また、2 階のテンソルの Lorentz 変換[1]は、（行列として表現するなら）左と右の両方から L を掛けることで得られるとされている。

よって、(107) 式と (108) 式から、 $\tilde{F}'$ は $\tilde{F}$ の、 G' は G の Lorentz 変換であることがわかる。

以上より、電場、磁場、電束密度、磁束密度、電荷密度、電流密度のすべてについて、S 系でのそれと S′ 系でのそれとが Lorentz 変換によって結び付けられる関係になっていることがわかる。

共変形式

∇_4 と $\nabla_4{}'$ の間の関係を、 L の 逆行列 L^{-1} を用いて

$$\nabla_4{}' = \nabla_4\,L^{-1} \tag{110}$$

と表すことができる。

(107) 式・(108) 式と (110) 式より

$$\nabla_4{}'\,\tilde{F}' = \nabla_4\,\tilde{F}\,L$$

$$\nabla_4{}'\,G' = \nabla_4\,G\,L$$

が導ける。

この 2 つの式から、 $\nabla_4{}'\,\tilde{F}'$ は $\nabla_4\,\tilde{F}$ の、 $\nabla_4{}'\,G'$ は $\nabla_4\,G$ の Lorentz 変換であることがわかる。

このことを踏まえると、(102) 式・(103) 式を見て、これらを S′ 系での表現に変形すると (104) 式・(105) 式になり、方程式の形が変わらない、すなわち、Einstein の特殊相対性原理に従う、ということを一目瞭然に理解できるようになる。

このように、運動する座標系へ移ると Lorentz 変換されるような量を用いると、物理法則を表す方程式を、Einstein の特殊相対性原理に従うことを明確にした形式で書くことができる。

物理法則のこのような表現の形式を、**共変形式**と呼ぶ。(102) 式・(103) 式の組、あるいは、(104) 式・(105) 式の組は、Maxwell 方程式の共変形式による表現の 1 つと言える。

[1] 正確には、2 階の**反変テンソル**の Lorentz 変換である。 $\tilde{F}\,,G$ は、**反変テンソル**と呼ばれる種類のテンソルである。

問題 10

座標系 S (t,x,y,z) から、S 系に対して 速度 $\begin{pmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ で運動する 座標系 S′ (t',x',y',z') への Lorentz 変換を考える。

質点の質量を m 、質点にはたらく力を $\boldsymbol{F}$ とする。

S 系での質点の位置の座標を $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ 、S′ 系での質点の位置の座標を $\boldsymbol{r}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ とする。

S 系での質点の速度を $\boldsymbol{v} = \dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ 、S′ 系での質点の速度を $\boldsymbol{v}' = \dfrac{d\boldsymbol{r}'}{dt'}$ とする。

S 系での質点の加速度を $\boldsymbol{a} = \dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt}$ 、S′ 系での質点の加速度を $\boldsymbol{a}' = \dfrac{d\boldsymbol{v}'}{dt'}$ とする。

Newton の運動方程式

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{F} \tag{111}$$

が、Lorentz 変換によってどのような形になるかを導こう。

真空中の光速を c 、 $\beta = \dfrac{V}{c}$ 、 $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ とする。

1. $\boldsymbol{v}$ の各成分を、 $\boldsymbol{v}'$ の各成分と c, β, γ で表せ。
2. $\boldsymbol{a}$ の各成分を、 $\boldsymbol{a}'$ の各成分と $\boldsymbol{v}'$ の各成分と c, β, γ で表せ。
3. Newton の運動方程式は Lorentz 変換を行うと形が変わることを説明せよ。

問題 10 の答

1. $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$ 、 $\boldsymbol{v}' = \begin{pmatrix} {v_x}' \\ {v_y}' \\ {v_z}' \end{pmatrix}$ とする。 $v_x = \dfrac{dx}{dt}$ 、 $v_y = \dfrac{dy}{dt}$ 、 $v_z = \dfrac{dz}{dt}$ 、 ${v_x}' = \dfrac{dx'}{dt'}$ 、 ${v_y}' = \dfrac{dy'}{dt'}$ 、 ${v_z}' = \dfrac{dz'}{dt'}$ である。

S 系と S′ 系の間の Lorentz 変換は

$$\begin{aligned} t' &= \gamma \left(t - \frac{\beta}{c}\, x \right) \quad (112) \\ x' &= \gamma \left(x - c\,\beta\, t \right) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}$$

である。これを $t\,,\, x\,,\, y\,,\, z$ について解くと

$$\begin{aligned} t &= \gamma \left(t' + \frac{\beta}{c}\, x' \right) \\ x &= \gamma \left(x' + c\,\beta\, t' \right) \quad (113) \\ y &= y' \quad (114) \\ z &= z' \quad (115) \end{aligned}$$

である。

第 1 に、質点の運動状態を表す任意の量（いずれかの座標系での位置、速度、加速度など） f の、S 系の時間に対する 変化率 $\dfrac{df}{dt}$ と S′ 系の時間に対する 変化率 $\dfrac{df}{dt'}$ の間の関係を導いておく。

質点の運動状態を表す量は、時刻だけの関数と考えられるから

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dt'}\,\frac{dt'}{dt} \quad (116)$$

が成り立つ。ここで、 $\dfrac{dt'}{dt}$ は、無限に近い 2 つの点の間を質点が移動するのにかかる、S 系と S′ 系の時間の比である。

(112) 式より

$$\begin{aligned} \frac{dt'}{dt} &= \gamma \left(1 - \frac{\beta}{c}\,\frac{dx}{dt} \right) \\ &= \gamma \left(1 - \frac{\beta}{c}\, v_x \right) \quad (117) \end{aligned}$$

である。

(117) 式を (116) 式に代入すると

$$\frac{df}{dt} = \gamma \left(1 - \frac{\beta}{c}\, v_x \right) \frac{df}{dt'} \quad (118)$$

が導かれる。

第 2 に、 v_x を表す式を導く。

$$v_x = \frac{dx}{dt}$$

(113) 式を代入して

$$= \gamma\left(\frac{dx'}{dt} + c\,\beta\,\frac{dt'}{dt}\right)$$

(118) 式の f を x' に置き換えた式と (117) 式を代入して

$$\begin{aligned}
&= \gamma^2\left(1 - \frac{\beta}{c}\,v_x\right)\left(\frac{dx'}{dt'} + c\,\beta\right) \\
&= \gamma^2\left(1 - \frac{\beta}{c}\,v_x\right)\left(v_x{}' + c\,\beta\right) \\
&= \gamma^2\left(v_x{}' + c\,\beta\right) - \frac{\gamma^2\,\beta}{c}\left(v_x{}' + c\,\beta\right)v_x
\end{aligned}$$

これより

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{\gamma^2\,\beta}{c}\left(v_x{}' + c\,\beta\right)\right)v_x &= \gamma^2\left(v_x{}' + c\,\beta\right) \\
\gamma^2\left(\frac{1}{\gamma^2} + \beta^2 + \frac{\beta}{c}\,v_x{}'\right)v_x &= \gamma^2\left(v_x{}' + c\,\beta\right)
\end{aligned}$$

$\dfrac{1}{\gamma^2} = 1 - \beta^2$ を代入して

$$\begin{aligned}
\gamma^2\left((\,1 - \beta^2\,) + \beta^2 + \frac{\beta}{c}\,v_x{}'\right)v_x &= \gamma^2\left(v_x{}' + c\,\beta\right) \\
\gamma^2\left(1 + \frac{\beta}{c}\,v_x{}'\right)v_x &= \gamma^2\left(v_x{}' + c\,\beta\right) \\
v_x &= \frac{v_x{}' + c\,\beta}{1 + \dfrac{\beta}{c}\,v_x{}'} \qquad (119)
\end{aligned}$$

を得る。

第 3 に、 v_x を用いず $v_x{}'$ を用いる表現で、 $\dfrac{df}{dt}$ と $\dfrac{df}{dt'}$ の間の関係をあらためて導いておく。

(119) 式を (117) 式に代入すると

$$
\begin{aligned}
\frac{dt'}{dt} &= \gamma \left(1 - \frac{\beta}{c} \cdot \frac{v_x{}' + c\,\beta}{1 + \dfrac{\beta}{c}\, v_x{}'} \right) \\
&= \gamma \cdot \frac{1 + \dfrac{\beta}{c}\, v_x{}' - \dfrac{\beta}{c} \left(v_x{}' + c\,\beta \right)}{1 + \dfrac{\beta}{c}\, v_x{}'} \\
&= \gamma \cdot \frac{1 - \beta^2}{1 + \dfrac{\beta}{c}\, v_x{}'}
\end{aligned}
$$

$1 - \beta^2 = \dfrac{1}{\gamma^2}$ を代入して

$$
= \frac{1}{\gamma \left(1 + \dfrac{\beta}{c}\, v_x{}' \right)} \tag{120}
$$

である。

(120) 式を (116) 式に代入すると

$$
\frac{df}{dt} = \frac{1}{\gamma \left(1 + \dfrac{\beta}{c}\, v_x{}' \right)} \frac{df}{dt'} \tag{121}
$$

が導かれる。

第 4 に、 v_y を表す式を導く。

$$
v_y = \frac{dy}{dt}
$$

(114) 式を代入して

$$
= \frac{dy'}{dt}
$$

(121) 式の f を y' に置き換えた式を代入して

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\gamma \left(1 + \dfrac{\beta}{c}\, v_x{}' \right)} \frac{dy'}{dt'} \\
&= \frac{v_y{}'}{\gamma \left(1 + \dfrac{\beta}{c}\, v_x{}' \right)} \qquad (122)
\end{aligned}
$$

を得る。

第 5 に、 v_z を表す式を導く。

(115) 式と、(121) 式の f を z' に置き換えた式を使って、 v_y を表す式を導いたのと同様に

$$
v_z = \frac{v_z{}'}{\gamma \left(1 + \dfrac{\beta}{c}\, v_x{}' \right)} \tag{123}
$$

を得る。

2. $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ 、 $\boldsymbol{a}' = \begin{pmatrix} {a_x}' \\ {a_y}' \\ {a_z}' \end{pmatrix}$ とする。 $a_x = \dfrac{dv_x}{dt}$ 、 $a_y = \dfrac{dv_y}{dt}$ 、 $a_z = \dfrac{dv_z}{dt}$ 、 ${a_x}' = \dfrac{d{v_x}'}{dt'}$ 、 ${a_y}' = \dfrac{d{v_y}'}{dt'}$ 、 ${a_z}' = \dfrac{d{v_z}'}{dt'}$ である。

第 1 に、 a_x を表す式を導く。

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}$$

(121) 式の f を v_x に置き換えた式を代入して

$$= \frac{1}{\gamma\left(1+\dfrac{\beta}{c}\,{v_x}'\right)}\frac{dv_x}{dt'}$$

(119) 式を代入して

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\gamma\left(1+\dfrac{\beta}{c}\,{v_x}'\right)}\frac{d}{dt'}\left(\frac{{v_x}'+c\,\beta}{1+\dfrac{\beta}{c}\,{v_x}'}\right) \\
&= \frac{1}{\gamma\left(1+\dfrac{\beta}{c}\,{v_x}'\right)}\cdot\frac{\dfrac{d{v_x}'}{dt'}\left(1+\dfrac{\beta}{c}\,{v_x}'\right)-\left({v_x}'+c\,\beta\right)\dfrac{\beta}{c}\dfrac{d{v_x}'}{dt'}}{\left(1+\dfrac{\beta}{c}\,{v_x}'\right)^2} \\
&= \frac{1-\beta^2}{\gamma\left(1+\dfrac{\beta}{c}\,{v_x}'\right)^3}\frac{d{v_x}'}{dt'} \\
&= \frac{1-\beta^2}{\gamma\left(1+\dfrac{\beta}{c}\,{v_x}'\right)^3}\,{a_x}'
\end{aligned}$$

$1-\beta^2 = \dfrac{1}{\gamma^2}$ を代入して

$$\begin{aligned}
&= \frac{\dfrac{1}{\gamma^2}}{\gamma\left(1+\dfrac{\beta}{c}\,{v_x}'\right)^3}\,{a_x}' \\
&= \frac{{a_x}'}{\gamma^3\left(1+\dfrac{\beta}{c}\,{v_x}'\right)^3} \qquad (124)
\end{aligned}$$

を得る。

第 2 に、 a_y を表す式を導く。

$$a_y = \frac{dv_y}{dt}$$

(121) 式の f を v_y に置き換えた式を代入して

$$= \frac{1}{\gamma\left(1+\frac{\beta}{c}\,{v_x}'\right)}\frac{dv_y}{dt'}$$

(122) 式を代入して

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\gamma\left(1+\frac{\beta}{c}\,{v_x}'\right)}\frac{d}{dt'}\left(\frac{{v_y}'}{\gamma\left(1+\frac{\beta}{c}\,{v_x}'\right)}\right) \\
&= \frac{1}{\gamma\left(1+\frac{\beta}{c}\,{v_x}'\right)}\cdot\frac{1}{\gamma}\,\frac{\frac{d{v_y}'}{dt'}\left(1+\frac{\beta}{c}\,{v_x}'\right)-{v_y}'\,\frac{\beta}{c}\,\frac{d{v_x}'}{dt'}}{\left(1+\frac{\beta}{c}\,{v_x}'\right)^2} \\
&= \frac{\left(1+\frac{\beta}{c}\,{v_x}'\right)\frac{d{v_y}'}{dt'}-\frac{\beta}{c}\,{v_y}'\,\frac{d{v_x}'}{dt'}}{\gamma^2\left(1+\frac{\beta}{c}\,{v_x}'\right)^3} \\
&= \frac{\left(1+\frac{\beta}{c}\,{v_x}'\right){a_y}'-\frac{\beta}{c}\,{v_y}'\,{a_x}'}{\gamma^2\left(1+\frac{\beta}{c}\,{v_x}'\right)^3} \qquad (125)
\end{aligned}$$

を得る。

第 3 に、 a_z を表す式を導く。

(121) 式の f を v_z に置き換えた式と、(123) 式を使って、 a_y を表す式を導いたのと同様に

$$a_z = \frac{\left(1+\frac{\beta}{c}\,{v_x}'\right){a_z}'-\frac{\beta}{c}\,{v_z}'\,{a_x}'}{\gamma^2\left(1+\frac{\beta}{c}\,{v_x}'\right)^3} \qquad (126)$$

を得る。

3. $\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$ とする。

まず、Newton の運動方程式（ (111) 式）を変形し、 $\dfrac{d^2\boldsymbol{r}'}{dt'^2}$, $\dfrac{d\boldsymbol{r}'}{dt'}$, $\boldsymbol{F}$ の各成分と m, c, β, γ による表現を導く。

$\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{a}$ であるから、(111) 式は、すなわち

$$m\,\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$$

である。成分表示すると

$$\begin{pmatrix} m\,a_x \\ m\,a_y \\ m\,a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$$

である。

この式に (124) 式・(125) 式・(126) 式を代入すると

$$\begin{pmatrix} m \cdot \dfrac{{a_x}'}{\gamma^3 \left(1 + \dfrac{\beta}{c}\,{v_x}'\right)^3} \\[2ex] m \cdot \dfrac{\left(1 + \dfrac{\beta}{c}\,{v_x}'\right) {a_y}' - \dfrac{\beta}{c}\,{v_y}'\,{a_x}'}{\gamma^2 \left(1 + \dfrac{\beta}{c}\,{v_x}'\right)^3} \\[2ex] m \cdot \dfrac{\left(1 + \dfrac{\beta}{c}\,{v_x}'\right) {a_z}' - \dfrac{\beta}{c}\,{v_z}'\,{a_x}'}{\gamma^2 \left(1 + \dfrac{\beta}{c}\,{v_x}'\right)^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$$

となる。 $\boldsymbol{v}' = \dfrac{d\boldsymbol{r}'}{dt'}$ 、 $\boldsymbol{a}' = \dfrac{d\boldsymbol{v}'}{dt'} = \dfrac{d^2\boldsymbol{r}'}{dt'^2}$ であるから、すなわち

$$\begin{pmatrix} m\,\dfrac{\dfrac{d^2x'}{dt'^2}}{\gamma^3 \left(1 + \dfrac{\beta}{c}\,\dfrac{dx'}{dt'}\right)^3} \\[2ex] m\,\dfrac{\left(1 + \dfrac{\beta}{c}\,\dfrac{dx'}{dt'}\right) \dfrac{d^2y'}{dt'^2} - \dfrac{\beta}{c}\,\dfrac{dy'}{dt'}\,\dfrac{d^2x'}{dt'^2}}{\gamma^2 \left(1 + \dfrac{\beta}{c}\,\dfrac{dx'}{dt'}\right)^3} \\[2ex] m\,\dfrac{\left(1 + \dfrac{\beta}{c}\,\dfrac{dx'}{dt'}\right) \dfrac{d^2z'}{dt'^2} - \dfrac{\beta}{c}\,\dfrac{dz'}{dt'}\,\dfrac{d^2x'}{dt'^2}}{\gamma^2 \left(1 + \dfrac{\beta}{c}\,\dfrac{dx'}{dt'}\right)^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} \tag{127}$$

である。

(127) 式が、Newton の運動方程式（ (111) 式）を $\dfrac{d^2\boldsymbol{r}'}{dt'^2}$, $\dfrac{d\boldsymbol{r}'}{dt'}$, $\boldsymbol{F}$ の各成分と m, c, β, γ による表現に変形した式である。

次に、Lorentz 変換によって Newton の運動方程式の形が変わると言えるのかどうかを考える。

S′ 系での質点の質量を m' 、質点が受ける力を $\boldsymbol{F}'$ として、(127) 式を $\dfrac{d^2\boldsymbol{r}'}{dt'^2}$, $\dfrac{d\boldsymbol{r}'}{dt'}$, $\boldsymbol{F}'$ の各成分と m' , c , β , γ による表現にさらに変形すれば、それが、S′ 系での運動方程式、すなわち、Newton の運動方程式を Lorentz 変換したものである。

そして、それが S 系での Newton の運動方程式（ (111) 式）と同じ形であるなら、Newton の運動方程式は Lorentz 変換を行っても形が変わらないことになる。

そうであるかどうかを考える。

m' , $\boldsymbol{F}'$ が m , $\boldsymbol{F}$ とどのような関係にあるのかがまだわかっていないが、(111) 式が座標の 2 階微分だけを含み 3 つの成分が同じ形であるのに対し、(127) 式が座標の 1 階微分と 2 階微分を含み第 1 成分と第 2・第 3 成分とで形が異なっていることに留意すると、 m' , $\boldsymbol{F}'$ が m , $\boldsymbol{F}$ といかなる関係にあろうとも、(127) 式を変形して (111) 式と同じ形にはならないことが、明らかである。

したがって、(127) 式を $\dfrac{d^2\boldsymbol{r}'}{dt'^2}$, $\dfrac{d\boldsymbol{r}'}{dt'}$, $\boldsymbol{F}'$ の各成分と m' , c , β , γ による表現に変形して、S 系での Newton の運動方程式（ (111) 式）と同じ形の式になることはない。

ゆえに、Newton の運動方程式は Lorentz 変換を行うと形が変わる、と言える。

問題 11

座標系 S (t,x,y,z) から、S 系に対して 速度 $\begin{pmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ で運動する 座標系 S′ (t',x',y',z') への Lorentz 変換を考える。

電場を $\boldsymbol{E}$ 、磁場を $\boldsymbol{H}$ 、電束密度を $\boldsymbol{D}$ 、磁束密度を $\boldsymbol{B}$ 、電荷密度を ρ 、電流密度を $\boldsymbol{j}$ とする。真空の誘電率を ε_0 、真空の透磁率を μ_0 とする。

真空中で、 $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{D}$ 、 $\boldsymbol{H}$ と $\boldsymbol{B}$ の間には

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \tag{128}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H} \tag{129}$$

が成り立つ。

Maxwell 方程式

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{130}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = +\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{j} \tag{131}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \tag{132}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{133}$$

が、Lorentz 変換によってどのような形になるかを導こう。

真空中の光速を c 、 $\beta = \dfrac{V}{c}$ 、 $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ とする。

時刻と位置の任意の 関数 f の S 系での 偏微分 $\dfrac{\partial f}{\partial t}, \dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z}$ は、 f を t, x, y, z の関数とみなしてこの 4 つの変数のうち 3 つを定数とした場合の残りの 1 つに対する偏微分係数であり、S′ 系での 偏微分 $\dfrac{\partial f}{\partial t'}, \dfrac{\partial f}{\partial x'}, \dfrac{\partial f}{\partial y'}, \dfrac{\partial f}{\partial z'}$ は、同じ f を t', x', y', z' の関数とみなしてこの 4 つの変数のうち 3 つを定数とした場合の残りの 1 つに対する偏微分係数である。

1. 時刻と位置の任意の 関数 f に対する $\dfrac{\partial f}{\partial t}, \dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z}$ を $\dfrac{\partial f}{\partial t'}, \dfrac{\partial f}{\partial x'}, \dfrac{\partial f}{\partial y'}, \dfrac{\partial f}{\partial z'}, c, \beta, \gamma$ で表せ。
2. 時刻と位置の任意の 関数 f に対する $\dfrac{\partial f}{\partial t'}, \dfrac{\partial f}{\partial x'}, \dfrac{\partial f}{\partial y'}, \dfrac{\partial f}{\partial z'}$ を $\dfrac{\partial f}{\partial t}, \dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z}, c, \beta, \gamma$ で表せ。
3. **問題 12** を考察せよ。
4. **問題 13** を考察せよ。
5. **問題 14** を考察せよ。
6. **問題 15** を考察せよ。
7. **問題 12** 、**問題 13** 、**問題 14** 、**問題 15** の考察に基づき、Maxwell 方程式は Lorentz 変換を行っても形が変わらないことを説明せよ。

問題 11 の答

1. t' , x' , y' , z' を t , x , y , z の関数とみなして t , x , y , z のうち 3 つを定数とした場合の残りの 1 つに対する偏微分係数を

$$\frac{\partial t'}{\partial t},\ \frac{\partial t'}{\partial x},\ \frac{\partial t'}{\partial y},\ \frac{\partial t'}{\partial z},\ \frac{\partial x'}{\partial t},\ \frac{\partial x'}{\partial x},\ \frac{\partial x'}{\partial y},\ \frac{\partial x'}{\partial z},\ \frac{\partial y'}{\partial t},\ \frac{\partial y'}{\partial x},\ \frac{\partial y'}{\partial y},\ \frac{\partial y'}{\partial z},\ \frac{\partial z'}{\partial t},\ \frac{\partial z'}{\partial x},\ \frac{\partial z'}{\partial y},\ \frac{\partial z'}{\partial z}$$

とする。これら 16 個 の偏微分係数は、S 系と S$'$ 系の間の Lorentz 変換が

$$t' = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right) \tag{134}$$

$$x' = \gamma\left(x - c\,\beta\,t\right) \tag{135}$$

$$y' = y \tag{136}$$

$$z' = z \tag{137}$$

であることより、それぞれ

$$\begin{array}{llll}
\dfrac{\partial t'}{\partial t} = \gamma & \dfrac{\partial t'}{\partial x} = -\dfrac{\beta\,\gamma}{c} & \dfrac{\partial t'}{\partial y} = 0 & \dfrac{\partial t'}{\partial z} = 0 \\
\dfrac{\partial x'}{\partial t} = -c\,\beta\,\gamma & \dfrac{\partial x'}{\partial x} = \gamma & \dfrac{\partial x'}{\partial y} = 0 & \dfrac{\partial x'}{\partial z} = 0 \\
\dfrac{\partial y'}{\partial t} = 0 & \dfrac{\partial y'}{\partial x} = 0 & \dfrac{\partial y'}{\partial y} = 1 & \dfrac{\partial y'}{\partial z} = 0 \\
\dfrac{\partial z'}{\partial t} = 0 & \dfrac{\partial z'}{\partial x} = 0 & \dfrac{\partial z'}{\partial y} = 0 & \dfrac{\partial z'}{\partial z} = 1
\end{array}$$

である。

よって

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial t} \\
&= \frac{\partial f}{\partial t'}\cdot\gamma + \frac{\partial f}{\partial x'}\cdot(-c\,\beta\,\gamma) + \frac{\partial f}{\partial y'}\cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial z'}\cdot 0 \\
&= \gamma\left(\frac{\partial f}{\partial t'} - c\,\beta\,\frac{\partial f}{\partial x'}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial x} \\
&= \frac{\partial f}{\partial t'}\cdot\left(-\frac{\beta\,\gamma}{c}\right) + \frac{\partial f}{\partial x'}\cdot\gamma + \frac{\partial f}{\partial y'}\cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial z'}\cdot 0 \\
&= \gamma\left(-\frac{\beta}{c}\frac{\partial f}{\partial t'} + \frac{\partial f}{\partial x'}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial y} \\
&= \frac{\partial f}{\partial t'}\cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial x'}\cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial y'}\cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial z'}\cdot 0 \\
&= \frac{\partial f}{\partial y'}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial z} \\
&= \frac{\partial f}{\partial t'}\cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial x'}\cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial y'}\cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial z'}\cdot 1 \\
&= \frac{\partial f}{\partial z'}
\end{aligned}$$

である。

2. (134) 式・(135) 式・(136) 式・(137) 式を t , x , y , z について解くと

$$
\begin{aligned}
t &= \gamma\left(t' + \frac{\beta}{c}\,x'\right) \\
x &= \gamma\left(x' + c\,\beta\,t'\right) \\
y &= y' \\
z &= z'
\end{aligned}
$$

であることより

$$
\begin{array}{llll}
\dfrac{\partial t}{\partial t'} = \gamma & \dfrac{\partial t}{\partial x'} = +\dfrac{\beta\,\gamma}{c} & \dfrac{\partial t}{\partial y'} = 0 & \dfrac{\partial t}{\partial z'} = 0 \\
\dfrac{\partial x}{\partial t'} = +c\,\beta\,\gamma & \dfrac{\partial x}{\partial x'} = \gamma & \dfrac{\partial x}{\partial y'} = 0 & \dfrac{\partial x}{\partial z'} = 0 \\
\dfrac{\partial y}{\partial t'} = 0 & \dfrac{\partial y}{\partial x'} = 0 & \dfrac{\partial y}{\partial y'} = 1 & \dfrac{\partial y}{\partial z'} = 0 \\
\dfrac{\partial z}{\partial t'} = 0 & \dfrac{\partial z}{\partial x'} = 0 & \dfrac{\partial z}{\partial y'} = 0 & \dfrac{\partial z}{\partial z'} = 1
\end{array}
$$

である。

よって

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial t'} &= \frac{\partial f}{\partial t}\,\frac{\partial t}{\partial t'} + \frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial t'} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial t'} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial t'} \\
&= \frac{\partial f}{\partial t}\cdot\gamma + \frac{\partial f}{\partial x}\cdot(+c\,\beta\,\gamma) + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot 0 \\
&= \gamma\left(\frac{\partial f}{\partial t} + c\,\beta\,\frac{\partial f}{\partial x}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x'} &= \frac{\partial f}{\partial t}\,\frac{\partial t}{\partial x'} + \frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial x'} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial x'} \\
&= \frac{\partial f}{\partial t}\cdot\left(+\frac{\beta\,\gamma}{c}\right) + \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\gamma + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot 0 \\
&= \gamma\left(\frac{\beta}{c}\,\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y'} &= \frac{\partial f}{\partial t}\,\frac{\partial t}{\partial y'} + \frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial y'} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial y'} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial y'} \\
&= \frac{\partial f}{\partial t}\cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial x}\cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot 0 \\
&= \frac{\partial f}{\partial y}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial z'} &= \frac{\partial f}{\partial t}\,\frac{\partial t}{\partial z'} + \frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial z'} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial z'} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial z'} \\
&= \frac{\partial f}{\partial t}\cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial x}\cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot 1 \\
&= \frac{\partial f}{\partial z}
\end{aligned}
$$

である。

3. **問題 12 の答** に記す。

4. **問題 13 の答** に記す。

5. **問題 14 の答** に記す。

6. **問題 15 の答** に記す。

7. **問題 12・問題 13・問題 14・問題 15** の考察で、S 系での Maxwell 方程式（(130) (131) (132) (133) 式）から、条件 (144) かつ条件 (152) かつ条件 (156) の下で (145) (153) (154) (157) 式が成り立つことが導かれた。

   条件 (144)・(152)・(156) は、**問題 13** の 設問 8. の考察を踏まえると、(128) 式・(129) 式に矛盾せず、同時に成立し得ると考えられる。

   (145) (153) (154) (157) 式は $\boldsymbol{E}'$, $\boldsymbol{H}'$, $\boldsymbol{D}'$, $\boldsymbol{B}'$ の S′ 系での偏微分と ρ' , $\boldsymbol{j}'$ の間に成り立つ関係式であるから、S′ 系での電場・磁場・電束密度・磁束密度・電荷密度・電流密度がそれぞれ $\boldsymbol{E}'$, $\boldsymbol{H}'$, $\boldsymbol{D}'$, $\boldsymbol{B}'$, ρ' , $\boldsymbol{j}'$ であるならば、この 4 つの式は、S′ 系での電磁場の基本方程式である。

   S′ 系での電場・磁場・電束密度・磁束密度・電荷密度・電流密度が何であるかは、演繹的な考察で解決する問題ではない。そのいっぽうで、仮に、それぞれ $\boldsymbol{E}'$, $\boldsymbol{H}'$, $\boldsymbol{D}'$, $\boldsymbol{B}'$, ρ' , $\boldsymbol{j}'$ であるとすれば、S 系での Maxwell 方程式（(130) (131) (132) (133) 式）と S′ 系での電磁場の基本方程式（(145) (153) (154) (157) 式）とが同じ形であることになり、Maxwell 方程式が、Lorentz 変換を行っても形が変わらない普遍的な基本法則であることになる。

   その有用性、法則としての単純さ、理論上の対称性のよさなどを考慮すると、Maxwell 方程式が普遍的な基本法則であるということの蓋然性は高いように思われる。

   そこで、S′ 系での電場・磁場・電束密度・磁束密度・電荷密度・電流密度はそれぞれ $\boldsymbol{E}'$, $\boldsymbol{H}'$, $\boldsymbol{D}'$, $\boldsymbol{B}'$, ρ' , $\boldsymbol{j}'$ である、と考える。

   すると、Maxwell 方程式は Lorentz 変換を行っても形が変わらない、と言える。

問題 12

問題 11 の条件の下で、以下の設問に答えよ。

1. (130) 式の第 2 成分と第 3 成分を変形し、 $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ の各成分の S′ 系での偏微分と c, β, γ による表現を導け。

2. (130) 式の第 1 成分を変形し、 $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ の各成分の S′ 系での偏微分と c, β, γ による表現を導け。

3. (133) 式を変形し、 $\boldsymbol{B}$ の各成分の S′ 系での偏微分と c, β, γ による表現を導け。

4. $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$ として、前問の結論より、 $\dfrac{\partial B_x}{\partial x'}$ を $\dfrac{\partial B_x}{\partial t'}$, $\dfrac{\partial B_y}{\partial y'}$, $\dfrac{\partial B_z}{\partial z'}$, c, β, γ で表す式を導け。

5. 前問の結論を 設問 2. の結論に代入せよ。

6. 設問 5. の結論と 設問 1. の結論を

$$\begin{aligned}
&(\text{設問 5.}) & \frac{\partial E_z{}'}{\partial y'} - \frac{\partial E_y{}'}{\partial z'} &= -\frac{\partial B_x{}'}{\partial t'} & (138)\\
&(\text{設問 1. の第 2 成分}) & \frac{\partial E_x{}'}{\partial z'} - \frac{\partial E_z{}'}{\partial x'} &= -\frac{\partial B_y{}'}{\partial t'} & (139)\\
&(\text{設問 1. の第 3 成分}) & \frac{\partial E_y{}'}{\partial x'} - \frac{\partial E_x{}'}{\partial y'} &= -\frac{\partial B_z{}'}{\partial t'} & (140)
\end{aligned}$$

と表すとき、 $E_x{}'$, $E_y{}'$, $E_z{}'$, $B_x{}'$, $B_y{}'$, $B_z{}'$ を $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ の各成分と c, β, γ で表す式を求めよ。

7. $\boldsymbol{E}' = \begin{pmatrix} E_x{}' \\ E_y{}' \\ E_z{}' \end{pmatrix}$ 、 $\boldsymbol{B}' = \begin{pmatrix} B_x{}' \\ B_y{}' \\ B_z{}' \end{pmatrix}$ とする。 $\nabla' = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x'} \\ \dfrac{\partial}{\partial y'} \\ \dfrac{\partial}{\partial z'} \end{pmatrix}$ とする。 $\boldsymbol{E}'$ と $\boldsymbol{B}'$ の間に成り立つ関係式を、

∇' を用いてベクトルによる表記で表せ。

問題 12 の答

1. $\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$ とする。

   (130) 式の第 2 成分は

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}$$

である。

問題 11 の 設問 1. の結論を使ってこの式を変形すると

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E_x}{\partial z'} - \gamma\left(-\frac{\beta}{c}\frac{\partial E_z}{\partial t'} + \frac{\partial E_z}{\partial x'}\right) &= -\gamma\left(\frac{\partial B_y}{\partial t'} - c\,\beta\,\frac{\partial B_y}{\partial x'}\right) \\
\frac{\partial E_x}{\partial z'} - \gamma\,\frac{\partial E_z}{\partial x'} - c\,\beta\,\gamma\,\frac{\partial B_y}{\partial x'} &= -\gamma\,\frac{\partial B_y}{\partial t'} - \frac{\beta\,\gamma}{c}\,\frac{\partial E_z}{\partial t'} \\
\frac{\partial E_x}{\partial z'} - \frac{\partial}{\partial x'}\Big(\gamma\left(E_z + c\,\beta\,B_y\right)\Big) &= -\frac{\partial}{\partial t'}\left(\gamma\left(B_y + \frac{\beta}{c}\,E_z\right)\right) \qquad (141)
\end{aligned}$$

が得られる。

これが、(130) 式の第 2 成分を変形し、 $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ の各成分の S′ 系での偏微分と c, β, γ による表現にした式である。

(130) 式の第 3 成分は

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

である。

問題 11 の 設問 1. の結論を使ってこの式を変形すると

$$\begin{aligned}
\gamma\left(-\frac{\beta}{c}\frac{\partial E_y}{\partial t'} + \frac{\partial E_y}{\partial x'}\right) - \frac{\partial E_x}{\partial y'} &= -\gamma\left(\frac{\partial B_z}{\partial t'} - c\,\beta\,\frac{\partial B_z}{\partial x'}\right) \\
\gamma\,\frac{\partial E_y}{\partial x'} - c\,\beta\,\gamma\,\frac{\partial B_z}{\partial x'} - \frac{\partial E_x}{\partial y'} &= -\gamma\,\frac{\partial B_z}{\partial t'} + \frac{\beta\,\gamma}{c}\,\frac{\partial E_y}{\partial t'} \\
\frac{\partial}{\partial x'}\Big(\gamma\left(E_y - c\,\beta\,B_z\right)\Big) - \frac{\partial E_x}{\partial y'} &= -\frac{\partial}{\partial t'}\left(\gamma\left(B_z - \frac{\beta}{c}\,E_y\right)\right) \qquad (142)
\end{aligned}$$

が得られる。

これが、(130) 式の第 3 成分を変形し、 $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ の各成分の S′ 系での偏微分と c, β, γ による表現にした式である。

2. (130) 式の第 1 成分は

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t}$$

である。

問題 11 の 設問 1. の結論を使ってこの式を変形すると

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E_z}{\partial y'} - \frac{\partial E_y}{\partial z'} &= -\gamma\left(\frac{\partial B_x}{\partial t'} - c\,\beta\,\frac{\partial B_x}{\partial x'}\right) \\
\frac{\partial E_z}{\partial y'} - \frac{\partial E_y}{\partial z'} - c\,\beta\,\gamma\,\frac{\partial B_x}{\partial x'} &= -\gamma\,\frac{\partial B_x}{\partial t'}
\end{aligned}$$

が得られる。

これが、(130) 式の第 1 成分を変形し、 $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ の各成分の S′ 系での偏微分と c, β, γ による表現にした式である。

3. (133) 式は

$$\frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}+\frac{\partial B_z}{\partial z} \quad = \quad 0$$

である。

問題 11 の 設問 1. の結論を使ってこの式を変形すると

$$\begin{aligned}\gamma\left(-\frac{\beta}{c}\,\frac{\partial B_x}{\partial t'}+\frac{\partial B_x}{\partial x'}\right)+\frac{\partial B_y}{\partial y'}+\frac{\partial B_z}{\partial z'} \quad &= \quad 0\\ -\frac{\beta\,\gamma}{c}\,\frac{\partial B_x}{\partial t'}+\gamma\,\frac{\partial B_x}{\partial x'}+\frac{\partial B_y}{\partial y'}+\frac{\partial B_z}{\partial z'} \quad &= \quad 0\end{aligned}$$

が得られる。

4. 前問の結論を変形して

$$\frac{\partial B_x}{\partial x'}=\frac{\beta}{c}\,\frac{\partial B_x}{\partial t'}-\frac{1}{\gamma}\,\frac{\partial B_y}{\partial y'}-\frac{1}{\gamma}\,\frac{\partial B_z}{\partial z'}$$

を得る。

5. 前問の結論を 設問 2. の結論に代入すると

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_z}{\partial y'}-\frac{\partial E_y}{\partial z'}-c\,\beta\,\gamma\cdot\left(\frac{\beta}{c}\,\frac{\partial B_x}{\partial t'}-\frac{1}{\gamma}\,\frac{\partial B_y}{\partial y'}-\frac{1}{\gamma}\,\frac{\partial B_z}{\partial z'}\right) \quad &= \quad -\gamma\,\frac{\partial B_x}{\partial t'}\\ \frac{\partial E_z}{\partial y'}+c\,\beta\,\frac{\partial B_y}{\partial y'}-\frac{\partial E_y}{\partial z'}+c\,\beta\,\frac{\partial B_z}{\partial z'} \quad &= \quad \beta^2\,\gamma\,\frac{\partial B_x}{\partial t'}-\gamma\,\frac{\partial B_x}{\partial t'}\\ \frac{\partial E_z}{\partial y'}+c\,\beta\,\frac{\partial B_y}{\partial y'}-\frac{\partial E_y}{\partial z'}+c\,\beta\,\frac{\partial B_z}{\partial z'} \quad &= \quad -(\,1-\beta^2\,)\,\gamma\,\frac{\partial B_x}{\partial t'}\end{aligned}$$

$1-\beta^2=\dfrac{1}{\gamma^2}$ を代入して

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_z}{\partial y'}+c\,\beta\,\frac{\partial B_y}{\partial y'}-\frac{\partial E_y}{\partial z'}+c\,\beta\,\frac{\partial B_z}{\partial z'} \quad &= \quad -\frac{1}{\gamma^2}\cdot\gamma\,\frac{\partial B_x}{\partial t'}\\ \gamma\,\frac{\partial E_z}{\partial y'}+c\,\beta\,\gamma\,\frac{\partial B_y}{\partial y'}-\gamma\,\frac{\partial E_y}{\partial z'}+c\,\beta\,\gamma\,\frac{\partial B_z}{\partial z'} \quad &= \quad -\frac{\partial B_x}{\partial t'}\\ \frac{\partial}{\partial y'}\Big(\gamma\,(\,E_z+c\,\beta\,B_y\,)\Big)-\frac{\partial}{\partial z'}\Big(\gamma\,(\,E_y-c\,\beta\,B_z\,)\Big) \quad &= \quad -\frac{\partial B_x}{\partial t'}\end{aligned} \tag{143}$$

を得る。

6. (138) 式と (143) 式とが等しく、(139) 式と (141) 式とが等しく、(140) 式と (142) 式とが等しい、と考える。

すると、これら 3 組 の 2 つずつの式をそれぞれ比較することにより

$$\left\{\begin{array}{lll} E_x{}' \;=\; E_x & E_y{}' \;=\; \gamma\,(\,E_y-c\,\beta\,B_z\,) & E_z{}' \;=\; \gamma\,(\,E_z+c\,\beta\,B_y\,)\\ B_x{}' \;=\; B_x & B_y{}' \;=\; \gamma\left(B_y+\dfrac{\beta}{c}\,E_z\right) & B_z{}' \;=\; \gamma\left(B_z-\dfrac{\beta}{c}\,E_y\right)\end{array}\right\} \tag{144}$$

が導かれる。

7. Maxwell 方程式の第 1 式と第 4 式（ (130) 式と (133) 式）から、条件 (144) の下で (138) (139) (140) 式が成り立つことが導かれた。

(138) 式の左辺は $\nabla'\times\boldsymbol{E}'$ の第 1 成分、右辺は $-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}'}{\partial t'}$ の第 1 成分である。

(139) 式の左辺は $\nabla'\times\boldsymbol{E}'$ の第 2 成分、右辺は $-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}'}{\partial t'}$ の第 2 成分である。

(140) 式の左辺は $\nabla'\times\boldsymbol{E}'$ の第 3 成分、右辺は $-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}'}{\partial t'}$ の第 3 成分である。

以上を合わせて考えると、条件 (144) の下で、 $\boldsymbol{E}'$ と $\boldsymbol{B}'$ の間には

$$\nabla'\times\boldsymbol{E}'=-\frac{\partial\boldsymbol{B}'}{\partial t'} \tag{145}$$

が成り立つと言える。

問題 13

問題 11 の条件の下で、以下の設問に答えよ。

1. (131) 式の第 2 成分と第 3 成分を変形し、 $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{D}$ の各成分の S′ 系での偏微分と $\boldsymbol{j}$ の各成分と c, β, γ による表現を導け。

2. (131) 式の第 1 成分を変形し、 $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{D}$ の各成分の S′ 系での偏微分と $\boldsymbol{j}$ の第 1 成分と c, β, γ による表現を導け。

3. (132) 式を変形し、 $\boldsymbol{D}$ の各成分の S′ 系での偏微分と ρ, c, β, γ による表現を導け。

4. $\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix}$ として、前問の結論より、 $\dfrac{\partial D_x}{\partial x'}$ を $\dfrac{\partial D_x}{\partial t'}$, $\dfrac{\partial D_y}{\partial y'}$, $\dfrac{\partial D_z}{\partial z'}$, ρ, c, β, γ で表す式を導け。

5. 前問の結論を 設問 2. の結論に代入せよ。

6. 設問 5. の結論と 設問 1. の結論を

$$\text{(設問 5.)} \qquad \frac{\partial {H_z}'}{\partial y'} - \frac{\partial {H_y}'}{\partial z'} = +\frac{\partial {D_x}'}{\partial t'} + {j_x}' \tag{146}$$

$$\text{(設問 1. の第 2 成分)} \qquad \frac{\partial {H_x}'}{\partial z'} - \frac{\partial {H_z}'}{\partial x'} = +\frac{\partial {D_y}'}{\partial t'} + {j_y}' \tag{147}$$

$$\text{(設問 1. の第 3 成分)} \qquad \frac{\partial {H_y}'}{\partial x'} - \frac{\partial {H_x}'}{\partial y'} = +\frac{\partial {D_z}'}{\partial t'} + {j_z}' \tag{148}$$

と表すとき、 ${H_x}'$, ${H_y}'$, ${H_z}'$, ${D_x}'$, ${D_y}'$, ${D_z}'$, ${j_x}'$, ${j_y}'$, ${j_z}'$ を $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{j}$ の各成分と ρ, c, β, γ で表す式を求めよ。

7. $\boldsymbol{H}' = \begin{pmatrix} {H_x}' \\ {H_y}' \\ {H_z}' \end{pmatrix}$ 、 $\boldsymbol{D}' = \begin{pmatrix} {D_x}' \\ {D_y}' \\ {D_z}' \end{pmatrix}$ 、 $\boldsymbol{j}' = \begin{pmatrix} {j_x}' \\ {j_y}' \\ {j_z}' \end{pmatrix}$ とする。 $\nabla' = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x'} \\ \dfrac{\partial}{\partial y'} \\ \dfrac{\partial}{\partial z'} \end{pmatrix}$ とする。 $\boldsymbol{H}'$ と $\boldsymbol{D}'$ と $\boldsymbol{j}'$ の間に成り立つ関係式を、 ∇' を用いてベクトルによる表記で表せ。

8. $\mu_0 \boldsymbol{H}'$ を $\boldsymbol{B}'$ とし、 $\dfrac{1}{\varepsilon_0}\boldsymbol{D}'$ を $\boldsymbol{E}'$ とする。 設問 6. の結論より $\boldsymbol{E}'$, $\boldsymbol{B}'$ の各成分を $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ の各成分と c, β, γ で表す式を求め、 **問題 12** の 設問 6. の結論と比較せよ。

問題 13 の答

1. $\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix}$ 、 $\boldsymbol{j} = \begin{pmatrix} j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix}$ とする。

   (131) 式の第 2 成分は

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \quad = \quad +\frac{\partial D_y}{\partial t} + j_y$$

   である。

   問題 11 の 設問 1. の結論を使ってこの式を変形すると

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H_x}{\partial z'} - \gamma\left(-\frac{\beta}{c}\frac{\partial H_z}{\partial t'} + \frac{\partial H_z}{\partial x'}\right) &= +\gamma\left(\frac{\partial D_y}{\partial t'} - c\,\beta\,\frac{\partial D_y}{\partial x'}\right) + j_y \\
\frac{\partial H_x}{\partial z'} - \gamma\,\frac{\partial H_z}{\partial x'} + c\,\beta\,\gamma\,\frac{\partial D_y}{\partial x'} &= +\gamma\,\frac{\partial D_y}{\partial t'} - \frac{\beta\,\gamma}{c}\,\frac{\partial H_z}{\partial t'} + j_y \\
\frac{\partial H_x}{\partial z'} - \frac{\partial}{\partial x'}\Big(\gamma\left(H_z - c\,\beta\,D_y\right)\Big) &= +\frac{\partial}{\partial t'}\left(\gamma\,\left(D_y - \frac{\beta}{c}\,H_z\right)\right) + j_y
\end{aligned} \tag{149}$$

   が得られる。

   これが、(131) 式の第 2 成分を変形し、 $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{D}$ の各成分の S′ 系での偏微分と $\boldsymbol{j}$ の第 2 成分と c , β , γ による表現にした式である。

   (131) 式の第 3 成分は

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \quad = \quad +\frac{\partial D_z}{\partial t} + j_z$$

   である。

   問題 11 の 設問 1. の結論を使ってこの式を変形すると

$$\begin{aligned}
\gamma\left(-\frac{\beta}{c}\frac{\partial H_y}{\partial t'} + \frac{\partial H_y}{\partial x'}\right) - \frac{\partial H_x}{\partial y'} &= +\gamma\left(\frac{\partial D_z}{\partial t'} - c\,\beta\,\frac{\partial D_z}{\partial x'}\right) + j_z \\
\gamma\,\frac{\partial H_y}{\partial x'} + c\,\beta\,\gamma\,\frac{\partial D_z}{\partial x'} - \frac{\partial H_x}{\partial y'} &= +\gamma\,\frac{\partial D_z}{\partial t'} + \frac{\beta\,\gamma}{c}\,\frac{\partial H_y}{\partial t'} + j_z \\
\frac{\partial}{\partial x'}\Big(\gamma\left(H_y + c\,\beta\,D_z\right)\Big) - \frac{\partial H_x}{\partial y'} &= +\frac{\partial}{\partial t'}\left(\gamma\,\left(D_z + \frac{\beta}{c}\,H_y\right)\right) + j_z
\end{aligned} \tag{150}$$

   が得られる。

   これが、(131) 式の第 3 成分を変形し、 $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{D}$ の各成分の S′ 系での偏微分と $\boldsymbol{j}$ の第 3 成分と c , β , γ による表現にした式である。

2. (131) 式の第 1 成分は

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \quad = \quad +\frac{\partial D_x}{\partial t} + j_x$$

   である。

   問題 11 の 設問 1. の結論を使ってこの式を変形すると

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H_z}{\partial y'} - \frac{\partial H_y}{\partial z'} &= +\gamma\left(\frac{\partial D_x}{\partial t'} - c\,\beta\,\frac{\partial D_x}{\partial x'}\right) + j_x \\
\frac{\partial H_z}{\partial y'} - \frac{\partial H_y}{\partial z'} + c\,\beta\,\gamma\,\frac{\partial D_x}{\partial x'} &= +\gamma\,\frac{\partial D_x}{\partial t'} + j_x
\end{aligned}$$

   が得られる。

   これが、(131) 式の第 1 成分を変形し、 $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{D}$ の各成分の S′ 系での偏微分と $\boldsymbol{j}$ の第 1 成分と c , β , γ による表現にした式である。

3. (132) 式は

$$\frac{\partial D_x}{\partial x}+\frac{\partial D_y}{\partial y}+\frac{\partial D_z}{\partial z} \;=\; \rho$$

である。

問題 11 の 設問 1. の結論を使ってこの式を変形すると

$$\begin{aligned}\gamma\left(-\frac{\beta}{c}\frac{\partial D_x}{\partial t'}+\frac{\partial D_x}{\partial x'}\right)+\frac{\partial B_y}{\partial y'}+\frac{\partial D_z}{\partial z'} &= \rho\\ -\frac{\beta\,\gamma}{c}\frac{\partial D_x}{\partial t'}+\gamma\frac{\partial D_x}{\partial x'}+\frac{\partial D_y}{\partial y'}+\frac{\partial D_z}{\partial z'} &= \rho\end{aligned}$$

が得られる。

4. 前問の結論を変形して

$$\frac{\partial D_x}{\partial x'}=\frac{\beta}{c}\frac{\partial D_x}{\partial t'}-\frac{1}{\gamma}\frac{\partial D_y}{\partial y'}-\frac{1}{\gamma}\frac{\partial D_z}{\partial z'}+\frac{\rho}{\gamma}$$

を得る。

5. 前問の結論を 設問 2. の結論に代入すると

$$\begin{aligned}\frac{\partial H_z}{\partial y'}-\frac{\partial H_y}{\partial z'}+c\,\beta\,\gamma\cdot\left(\frac{\beta}{c}\frac{\partial D_x}{\partial t'}-\frac{1}{\gamma}\frac{\partial D_y}{\partial y'}-\frac{1}{\gamma}\frac{\partial D_z}{\partial z'}+\frac{\rho}{\gamma}\right) &= +\gamma\frac{\partial D_x}{\partial t'}+j_x\\ \frac{\partial H_z}{\partial y'}-c\,\beta\frac{\partial D_y}{\partial y'}-\frac{\partial H_y}{\partial z'}-c\,\beta\frac{\partial D_z}{\partial z'} &= -\beta^2\gamma\frac{\partial D_x}{\partial t'}+\gamma\frac{\partial D_x}{\partial t'}+j_x-c\,\beta\,\rho\\ \frac{\partial H_z}{\partial y'}-c\,\beta\frac{\partial D_y}{\partial y'}-\frac{\partial H_y}{\partial z'}-c\,\beta\frac{\partial D_z}{\partial z'} &= +(1-\beta^2)\,\gamma\frac{\partial D_x}{\partial t'}+j_x-c\,\beta\,\rho\end{aligned}$$

$1-\beta^2=\dfrac{1}{\gamma^2}$ を代入して

$$\begin{aligned}\frac{\partial H_z}{\partial y'}-c\,\beta\frac{\partial D_y}{\partial y'}-\frac{\partial H_y}{\partial z'}-c\,\beta\frac{\partial D_z}{\partial z'} &= +\frac{1}{\gamma^2}\cdot\gamma\frac{\partial D_x}{\partial t'}+j_x-c\,\beta\,\rho\\ \gamma\frac{\partial H_z}{\partial y'}-c\,\beta\,\gamma\frac{\partial D_y}{\partial y'}-\gamma\frac{\partial H_y}{\partial z'}-c\,\beta\,\gamma\frac{\partial D_z}{\partial z'} &= +\frac{\partial D_x}{\partial t'}+\gamma\,j_x-c\,\beta\,\gamma\,\rho\\ \frac{\partial}{\partial y'}\Big(\gamma\,(H_z-c\,\beta\,D_y)\Big)-\frac{\partial}{\partial z'}\Big(\gamma\,(H_y+c\,\beta\,D_z)\Big) &= +\frac{\partial D_x}{\partial t'}+\gamma\Big(j_x-c\,\beta\,\rho\Big) \qquad (151)\end{aligned}$$

を得る。

6. (146) 式と (151) 式とが等しく、(147) 式と (149) 式とが等しく、(148) 式と (150) 式とが等しい、と考える。

すると、これら 3 組 の 2 つずつの式をそれぞれ比較することにより

$$\left\{\begin{array}{lll} {H_x}'=H_x & {H_y}'=\gamma\,(H_y+c\,\beta\,D_z) & {H_z}'=\gamma\,(H_z-c\,\beta\,D_y)\\ {D_x}'=D_x & {D_y}'=\gamma\left(D_y-\dfrac{\beta}{c}H_z\right) & {D_z}'=\gamma\left(D_z+\dfrac{\beta}{c}H_y\right)\\ {j_x}'=\gamma\Big(j_x-c\,\beta\,\rho\Big) & {j_y}'=j_y & {j_z}'=j_z \end{array}\right\} \qquad (152)$$

が導かれる。

7. Maxwell 方程式の第 2 式と第 3 式（ (131) 式と (132) 式）から、条件 (152) の下で (146) (147) (148) 式が成り立つことが導かれた。

   (146) 式の左辺は $\nabla' \times \boldsymbol{H}'$ の第 1 成分、右辺は $+\dfrac{\partial \boldsymbol{D}'}{\partial t'} + \boldsymbol{j}'$ の第 1 成分である。

   (147) 式の左辺は $\nabla' \times \boldsymbol{H}'$ の第 2 成分、右辺は $+\dfrac{\partial \boldsymbol{D}'}{\partial t'} + \boldsymbol{j}'$ の第 2 成分である。

   (148) 式の左辺は $\nabla' \times \boldsymbol{H}'$ の第 3 成分、右辺は $+\dfrac{\partial \boldsymbol{D}'}{\partial t'} + \boldsymbol{j}'$ の第 3 成分である。

   以上を合わせて考えると、条件 (152) の下で、 $\boldsymbol{H}'$ と $\boldsymbol{D}'$ と $\boldsymbol{j}'$ の間には

$$\nabla' \times \boldsymbol{H}' = +\frac{\partial \boldsymbol{D}'}{\partial t'} + \boldsymbol{j}' \tag{153}$$

   が成り立つと言える。

8. 設問 6. の結論は、条件 (152) である。 **問題 12** の 設問 6. の結論は、条件 (144) である。

   よって、この設問でするべきは、 $\boldsymbol{B}' = \mu_0\, \boldsymbol{H}'$ および $\boldsymbol{E}' = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\, \boldsymbol{D}'$ の各成分に条件 (152) に含まれる式を代入し、さらに (128) 式・(129) 式を用いて $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ の各成分と c, β, γ による表現に変形した上で、条件 (144) に含まれる式と比較することである。

   第 1 に、 ${E_x}'$ は

$$E_x{}' = \frac{1}{\varepsilon_0}\, D_x{}'$$

   条件 (152) の $D_x{}'$ を代入して

$$= \frac{1}{\varepsilon_0}\, D_x$$

   (128) 式の第 1 成分を代入して

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \varepsilon_0\, E_x \\ &= E_x \end{aligned}$$

   である。これを、条件 (144) の $E_x{}'$ と比較すると、一致している。

   第 2 に、 $E_y{}'$ は

$$E_y{}' = \frac{1}{\varepsilon_0}\, D_y{}'$$

   条件 (152) の $D_y{}'$ を代入して

$$= \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \gamma \left(D_y - \frac{\beta}{c}\, H_z \right)$$

   (128) 式の第 2 成分と、(129) 式の第 3 成分を H_z について解いた式を代入して

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \gamma \left(\varepsilon_0\, E_y - \frac{\beta}{c} \cdot \frac{1}{\mu_0}\, B_z \right) \\ &= \gamma \left(E_y - \frac{\beta}{c} \cdot \frac{1}{\varepsilon_0\, \mu_0}\, B_z \right) \end{aligned}$$

   $\dfrac{1}{\varepsilon_0\, \mu_0} = c^2$ を代入して

$$\begin{aligned} &= \gamma \left(E_y - \frac{\beta}{c} \cdot c^2\, B_z \right) \\ &= \gamma \left(E_y - c\, \beta\, B_z \right) \end{aligned}$$

   である。これを、条件 (144) の $E_y{}'$ と比較すると、一致している。

第 3 に、 ${E_z}'$ は、 ${E_y}'$ と同様の考え方より

$$\begin{aligned} {E_z}' &= \frac{1}{\varepsilon_0}\,{D_z}' \\ &= \gamma\,\big(\,E_z + c\,\beta\,B_y\,\big) \end{aligned}$$

である。これを、条件 (144) の ${E_z}'$ と比較すると、一致している。

第 4 に、 ${B_x}'$ は

$$ {B_x}' = \mu_0\,{H_x}' $$

条件 (152) の ${H_x}'$ を代入して

$$ = \mu_0\,H_x $$

(129) 式の第 1 成分を H_x について解いた式を代入して

$$\begin{aligned} &= \mu_0 \cdot \frac{1}{\mu_0}\,B_x \\ &= B_x \end{aligned}$$

である。これを、条件 (144) の ${B_x}'$ と比較すると、一致している。

第 5 に、 ${B_y}'$ は

$$ {B_y}' = \mu_0\,{H_y}' $$

条件 (152) の ${H_y}'$ を代入して

$$ = \mu_0 \cdot \gamma\,\big(\,H_y + c\,\beta\,D_z\,\big) $$

(129) 式の第 2 成分を H_y について解いた式と、(128) 式の第 3 成分を代入して

$$\begin{aligned} &= \mu_0 \cdot \gamma\,\left(\,\frac{1}{\mu_0}\,B_y + c\,\beta \cdot \varepsilon_0\,E_z\,\right) \\ &= \gamma\,\big(\,B_y + c\,\beta \cdot \varepsilon_0\,\mu_0\,E_z\,\big) \end{aligned}$$

$\varepsilon_0\,\mu_0 = \dfrac{1}{c^2}$ を代入して

$$\begin{aligned} &= \gamma\,\left(\,B_y + c\,\beta \cdot \frac{1}{c^2}\,E_z\,\right) \\ &= \gamma\,\left(\,B_y + \frac{\beta}{c}\,E_z\,\right) \end{aligned}$$

である。これを、条件 (144) の ${B_y}'$ と比較すると、一致している。

第 6 に、 ${B_z}'$ は、 ${B_y}'$ と同様の考え方より

$$\begin{aligned} {B_z}' &= \mu_0\,{H_z}' \\ &= \gamma\,\left(\,B_z - \frac{\beta}{c}\,E_y\,\right) \end{aligned}$$

である。これを、条件 (144) の ${B_z}'$ と比較すると、一致している。

以上の考察より、条件 (144) と条件 (152) の両方が、(128) 式・(129) 式に矛盾せず、同時に成立し得る、ということがわかる。

問題 14

問題 11 の条件の下で、以下の設問に答えよ。

$\nabla' = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x'} \\ \dfrac{\partial}{\partial y'} \\ \dfrac{\partial}{\partial z'} \end{pmatrix}$ とする。 **問題 13** で導入した $\boldsymbol{D}'$ に ∇' をスカラー積として作用させた $\nabla' \cdot \boldsymbol{D}'$ を考える。

1. $\nabla' \cdot \boldsymbol{D}'$ を $\boldsymbol{D}'$ の各成分の S 系 での偏微分と c, β, γ で表す式を求めよ。
2. **問題 13** の 設問 6. の結論を前問の結論に代入し、 $\nabla' \cdot \boldsymbol{D}'$ を $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{D}$ の各成分の S 系での偏微分と c, β, γ で表す式を求めよ。
3. (131) 式と (132) 式を使って前問の結論を変形し、 $\nabla' \cdot \boldsymbol{D}'$ を $\boldsymbol{j}$ の第 1 成分と ρ, c, β, γ で表す式を求めよ。
4. 前問の結論を

$$\nabla' \cdot \boldsymbol{D}' = \rho' \tag{154}$$

と表すとき、 ρ' を $\boldsymbol{j}$ の第 1 成分と ρ, c, β, γ で表す式を求めよ。

問題 14 の答

1.

$$\nabla' \cdot \boldsymbol{D}' = \frac{\partial D_x{}'}{\partial x'} + \frac{\partial D_y{}'}{\partial y'} + \frac{\partial D_z{}'}{\partial z'}$$

である。

問題 11 の 設問 2. の結論を使うと

$$\nabla' \cdot \boldsymbol{D}' = \gamma \left(\frac{\beta}{c} \frac{\partial D_x{}'}{\partial t} + \frac{\partial D_x{}'}{\partial x} \right) + \frac{\partial D_y{}'}{\partial y} + \frac{\partial D_z{}'}{\partial z}$$

である。

2. $\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix}$ 、 $\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix}$ とする。

問題 13 の 設問 6. の結論（条件 (152) ）の $D_x{}'$, $D_y{}'$, $D_z{}'$ を前問の結論に代入すると

$$\begin{aligned}\nabla' \cdot \boldsymbol{D}' &= \gamma \left(\frac{\beta}{c} \frac{\partial D_x}{\partial t} + \frac{\partial D_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\gamma \left(D_y - \frac{\beta}{c} H_z \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\gamma \left(D_z + \frac{\beta}{c} H_y \right) \right) \\ &= \gamma \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) + \frac{\beta \gamma}{c} \left(\frac{\partial D_x}{\partial t} - \frac{\partial H_z}{\partial y} + \frac{\partial H_y}{\partial z} \right)\end{aligned}$$

となる。

3. $\boldsymbol{j} = \begin{pmatrix} j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix}$ とする。

Maxwell 方程式の第 2 式（ (131) 式）の第 1 成分より

$$\frac{\partial D_x}{\partial t} - \frac{\partial H_z}{\partial y} + \frac{\partial H_y}{\partial z} = -j_x$$

である。

Maxwell 方程式の第 3 式（ (132) 式）は

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho$$

である。

これら 2 つを前問の結論に代入すると

$$\begin{aligned}\nabla' \cdot \boldsymbol{D}' &= \gamma \cdot \rho + \frac{\beta \gamma}{c} \cdot (-j_x) \\ &= \gamma \left(\rho - \frac{\beta}{c} j_x \right) \end{aligned} \tag{155}$$

が得られる。

4. (154) 式と (155) 式とが等しい、と考える。

すると、これら 2 つの式を比較することにより

$$\rho' = \gamma \left(\rho - \frac{\beta}{c} j_x \right) \tag{156}$$

が導かれる。

問題 15

問題 11 の条件の下で、以下の設問に答えよ。

$\nabla' = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x'} \\ \dfrac{\partial}{\partial y'} \\ \dfrac{\partial}{\partial z'} \end{pmatrix}$ とする。**問題 12** で導入した $\boldsymbol{B}'$ に ∇' をスカラー積として作用させた $\nabla' \cdot \boldsymbol{B}'$ を考える。

1. $\nabla' \cdot \boldsymbol{B}'$ を $\boldsymbol{B}'$ の各成分の S 系 での偏微分と c, β, γ で表す式を求めよ。
2. **問題 12** の 設問 6. の結論を前問の結論に代入し、 $\nabla' \cdot \boldsymbol{B}'$ を $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ の各成分の S 系での偏微分と c, β, γ で表す式を求めよ。
3. (130) 式と (133) 式を使って前問の結論を変形し、 $\nabla' \cdot \boldsymbol{B}'$ を表す式を求めよ。

問題 15 の答

1.

$$\nabla' \cdot \boldsymbol{B}' = \frac{\partial {B_x}'}{\partial x'} + \frac{\partial {B_y}'}{\partial y'} + \frac{\partial {B_z}'}{\partial z'}$$

である。

問題 11 の 設問 2. の結論を使うと

$$\nabla' \cdot \boldsymbol{B}' = \gamma \left(\frac{\beta}{c} \frac{\partial {B_x}'}{\partial t} + \frac{\partial {B_x}'}{\partial x} \right) + \frac{\partial {B_y}'}{\partial y} + \frac{\partial {B_z}'}{\partial z}$$

である。

2. $\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$ 、 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$ とする。

問題 12 の 設問 6. の結論（条件 (144) ）の ${B_x}'$, ${B_y}'$, ${B_z}'$ を前問の結論に代入すると

$$\begin{aligned} \nabla' \cdot \boldsymbol{B}' &= \gamma \left(\frac{\beta}{c} \frac{\partial B_x}{\partial t} + \frac{\partial B_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\gamma \left(B_y + \frac{\beta}{c} E_z \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\gamma \left(B_z - \frac{\beta}{c} E_y \right) \right) \\ &= \gamma \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) + \frac{\beta \gamma}{c} \left(\frac{\partial B_x}{\partial t} + \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

となる。

3. Maxwell 方程式の第 1 式（ (130) 式）の第 1 成分より

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} + \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0$$

である。

Maxwell 方程式の第 4 式（ (133) 式）は

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

である。

これら 2 つを前問の結論に代入すると

$$\begin{aligned} \nabla' \cdot \boldsymbol{B}' &= \gamma \cdot 0 + \frac{\beta \gamma}{c} \cdot 0 \\ &= 0 \qquad (157) \end{aligned}$$

が得られる。

3 特殊相対性理論

3.1 世界間隔

2 つの事象を考えるとき、物理学は、それらが起こる 時刻の差 Δt と 位置（座標）の差 $\Delta \boldsymbol{r}$ 、すなわち、2 つの事象の間の時間的な隔たりと空間的な隔たりとを問題にする。
ところが、 Δt と $\Delta \boldsymbol{r}$ は、時間と空間の相対性のために、観測する座標系に依存して変化してしまう。
さらに、 Δt と $\Delta \boldsymbol{r}$ とは、座標変換によって交じり合ってしまう。
そのため、特殊相対性理論では、時間と空間を一体のものとして扱う。時間と空間を一体にした概念を、**時空**と呼ぶ。時空の概念を用いると、時間と空間の相対性を、より単純で普遍的な形に表すことができ、自然の本質に迫る議論を行うことができる。

2 つの事象の間の時空的な隔たりを表す量として

$$|\Delta s|^2 = c^2 \, |\Delta t|^2 - |\Delta \boldsymbol{r}|^2 \tag{158}$$

で定まる Δs を考える。 Δs を、2 つの事象の間の**世界間隔**と呼ぶ。

Lorentz 不変量

(158) 式は、Lorentz 変換を行って別の慣性系での表現に変形しても同じ形になる。つまり、世界間隔は、どの慣性系で観測しても等しい。
よって、世界間隔を用いた議論は、慣性系で観測する限り、観測者によらない、普遍的なものとなる。
このような、慣性系の選び方と無関係に定まる量（**Lorentz 不変量**）を、**スカラー**と呼ぶ。

質点の運動と世界間隔の関係

質点の運動は、「質点が存在する」という事象が時空の中で特定の軌跡を描く現象と解釈できる。
力学とは、その軌跡の上の 2 つの事象（事象 1・事象 2 とする）についての Δt と $\Delta \boldsymbol{r}$ の間の関係を論じることにほかならない。一般性の高い議論では、事象 1 と事象 2 の間の時間的・空間的な隔たりが無限に小さい極限でのそれを論じる。
事象 1 と事象 2 の間の時間的・空間的な隔たりが無限に小さい極限において、任意の慣性系での、事象 1 と事象 2 が起こる時刻の差を dt 、位置（座標）の差を $d\boldsymbol{r}$ とすると、事象 1 と事象 2 の間の 世界間隔 ds は、(158) 式より

$$|ds|^2 = c^2 \, |dt|^2 - |d\boldsymbol{r}|^2 \tag{159}$$

で定まる。
(159) 式は、慣性系で 時間 dt が経過し 変位 $d\boldsymbol{r}$ だけ質点が動く間に、質点の存在という事象が動く時空の 世界間隔 ds を与える式と解釈できる。

3.2 固有時間

運動する質点を考えるとき、質点に固定した時計の刻む時刻を、**固有時間**と呼ぶ。

たとえば、観測者の座標系 (t,x,y,z) で「質点が 時刻 t_1 に 座標 $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ にある」という事象が、質点に固定した座標系 (τ,ξ,η,ζ) で 時刻 τ_1 、 座標 $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \\ \zeta_1 \end{pmatrix}$ に観測されるとすると、 τ_1 がこの事象に対応する固有時間である。

固有時間は、質点に固定した座標系で観測する時刻のことであるから、運動をどの座標系で観測するかとは無関係に定まる。

すなわち、固有時間は Lorentz 不変量（スカラー）である。

固有時間と世界間隔の関係

質点に固定した座標系で無限に小さい時間が経過する間に質点の存在という事象が動く時空の世界間隔を与える式は、どうなるであろうか。

(159) 式は、(158) 式から導いたものなので、すべての慣性系において成り立つことは明らかである。しかし、質点に固定した座標系は、一般に、質点の運動が加速度運動であるから、慣性系ではない。

ところが、(159) 式が無限に小さい時間の質点の運動に関する式であることを考慮すると、無限に小さい時間については質点の運動を等速度運動とみなせることから、質点に固定した座標系を慣性系として扱えることになる。

ゆえに、質点に固定した座標系において、(159) 式がつねに成り立つと言える。

ここで、事象 1 に対応する固有時間と事象 2 に対応する固有時間との差を $d\tau$ とすると、質点に固定した座標系では、$dt = d\tau$ である。

また、質点に固定した座標系では、質点の位置は変化しないので、 $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$ である。

(159) 式にこれらを代入すると

$$|ds|^2 = c^2\,|d\tau|^2 \tag{160}$$

が得られる。

(160) 式は、 固有時間の差 $d\tau$ が、本質的に、 世界間隔 ds を表す量である、ということを示している。

慣性系の時刻と固有時間との関係

(159) 式と (160) 式より、

$$c^2\,|d\tau|^2 = c^2\,|dt|^2 - |d\boldsymbol{r}|^2$$

が導かれる。これは、慣性系で 時間 dt が経過し 変位 $d\boldsymbol{r}$ だけ質点が動く間に経過する 固有時間 $d\tau$ を与える式である。

これより

$$\left|\frac{d\tau}{dt}\right|^2 = 1 - \frac{1}{c^2}\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|^2$$

が導かれる。ここで、 $\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ は慣性系での質点の速度であるから、それを $\boldsymbol{v}$ とすると

$$\left|\frac{d\tau}{dt}\right|^2 = 1 - \frac{|\boldsymbol{v}|^2}{c^2}$$

である。これは、慣性系で 時間 dt が経過する間に経過する 固有時間 $d\tau$ を与える式である。

この関係は、Lorentz 変換の式から、直接、導出することもできる。それによれば

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{1 - \frac{|\boldsymbol{v}|^2}{c^2}}$$

である。

3.3 4 元ベクトル

真空中の光速を c とする。

4 元ベクトル

Lorentz 変換は、行列を用いて (16) 式のように表せる。これは、 時刻 t と 座標 x , y , z の 4 つの量を一緒にして 1 つの ベクトル $\begin{pmatrix} c\,t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ として表すことで可能となる、スマートな表現である。このベクトルを、 x^μ （ $\mu = 0, 1, 2, 3$ ）と表記し、**4 元位置**と呼ぶ。

4 元位置のような、Lorentz 変換に関わる 4 成分の物理量を表すベクトルを、**4 元ベクトル**と呼ぶ。

反変ベクトル

座標系 S と、それに対して等速度運動する座標系 S′ を考える。

ある事象の S 系での 4 元位置を x^μ 、S′ 系での 4 元位置を x'^ν （ $\nu = 0, 1, 2, 3$ ）とすると、 x'^ν は x^μ の Lorentz 変換によって与えられる。

このような、互いに等速度運動する 2 つの座標系の間での関係が Lorentz 変換で与えられる 4 元ベクトルを、**反変ベクトル**と呼ぶ。

4 元位置以外にも、反変ベクトルで表される物理量が数多くある。

4 元速度

質点が運動しているとき、質点の固有時間を τ 、4 元位置を x^μ として

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

で定義される u^μ を、**4 元速度**と呼ぶ。4 元速度は、反変ベクトルである。

4 元運動量

静止質量 m の質点が運動しているとき、質点の 4 元速度を u^μ として

$$p^\mu = m\,u^\mu$$

で定義される p^μ を、**4 元運動量**と呼ぶ。4 元運動量は、反変ベクトルである。

4 元力

質点が運動しているとき、質点の固有時間を τ 、4 元運動量を p^μ として

$$f^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau}$$

で定義される f^μ を、**4 元力**と呼ぶ。4 元力は、反変ベクトルである。

4 元電流密度

ある時刻における、ある位置の電荷密度を ρ 、電流密度を $\boldsymbol{j} = \begin{pmatrix} j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix}$ として

$$j^\mu = \begin{pmatrix} c\,\rho \\ j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix}$$

で定義される j^μ を、**4 元電流密度**と呼ぶ。4 元電流密度は、反変ベクトルである。

Maxwell 方程式

Maxwell 方程式は、(102) 式と (103) 式で表される。

4 元ベクトルの概念を踏まえると、(103) 式に現れる $\boldsymbol{j}_4$ が 4 元電流密度 j^μ にほかならないことを理解できる。

(102) 式・(103) 式に現れる 行列 $\tilde{F}$, G は **2 階のテンソル**[2]である。2 階のテンソルは、ふつう、2 つの添字をつけた文字で表される。すなわち、(102) 式に現れる $\tilde{F}$ を $\tilde{F}^{ij}$ 、(103) 式に現れる G を G^{ij} と表す（ $i = 0, 1, 2, 3$ 、 $j = 0, 1, 2, 3$ ）。

また、(102) 式・(103) 式に現れる 微分演算子 ∇_4 も、やはり 4 元ベクトル[3]である。この 4 元ベクトルを、ふつう、 ∂_μ と表す。

相対性理論では、これらの 4 元ベクトルと 2 階のテンソルを用いて、(102) 式・(103) 式を

$$\begin{aligned} \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} &= 0 \\ \partial_\mu G^{\mu\nu} &= j^\nu \end{aligned}$$

と表す[4]。

この 2 つの式は、どちらも、右辺が反変ベクトルである。したがって、左辺も反変ベクトルである。つまり、Maxwell 方程式は、両辺が反変ベクトルであるような方程式として表せるのである。

反変ベクトルであるから、それらを Lorentz 変換すると、変換した先の慣性系における同じ物理量になる。そのため、変換した先の慣性系でも同じ形の方程式が成り立つことになる。

電磁気学が Einstein の特殊相対性原理に従うことを、このように、方程式の反変ベクトルによる表現から説明することができる。物理法則の**共変形式**とは、両辺が反変ベクトルであるような方程式として表現することを指す、と考えてもよい。

[2]反変テンソル。
[3]こちらは、互いに等速度運動する 2 つの座標系の間での関係が **Lorentz 逆変換**で与えられる 4 元ベクトルであり、**共変ベクトル**と呼ばれる。
[4]**Einstein の縮約記法**と呼ばれる記法を用いている。

問題 16

座標系 S (t, x, y, z) と、S 系に対して x 方向に一定の速度で運動する 座標系 S′ (t', x', y', z') がある。

真空中の光速を c とする。

2 つの事象 1 と 2 を考える。

事象 1 は、S 系で 時刻 t_1 に 座標 $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ の位置において、S′ 系では 時刻 ${t_1}'$ に 座標 $\begin{pmatrix} {x_1}' \\ {y_1}' \\ {z_1}' \end{pmatrix}$ の位置において起こる。

事象 2 は、S 系で 時刻 t_2 に 座標 $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ の位置において、S′ 系で 時刻 ${t_2}'$ に 座標 $\begin{pmatrix} {x_2}' \\ {y_2}' \\ {z_2}' \end{pmatrix}$ の位置において起こる。

事象 1 と 2 の間の 世界間隔 $\varDelta s$ は、S 系での時刻と座標を用いて

$$\varDelta s = \sqrt{c^2\,(\,t_2 - t_1\,)^2 - (\,x_2 - x_1\,)^2 - (\,y_2 - y_1\,)^2 - (\,z_2 - z_1\,)^2} \tag{161}$$

で与えられる。

$\varDelta s$ が、S′ 系での時刻と座標を用いて

$$\varDelta s = \sqrt{c^2\,(\,{t_2}' - {t_1}'\,)^2 - (\,{x_2}' - {x_1}'\,)^2 - (\,{y_2}' - {y_1}'\,)^2 - (\,{z_2}' - {z_1}'\,)^2} \tag{162}$$

で与えられることを示せ。

問題 16 の答

S 系に対する S′ 系の運動の速度を $\begin{pmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とする。

$\beta = \dfrac{V}{c}$ 、 $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ とする。

S 系と S′ 系の間の Lorentz 変換は

$$\begin{aligned} t' &= \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}\,x\right) \\ x' &= \gamma\Big(x - c\,\beta\,t\Big) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}$$

である。これを $t\,,\,x\,,\,y\,,\,z$ について解くと

$$t = \gamma\left(t' + \frac{\beta}{c}\,x'\right) \tag{163}$$
$$x = \gamma\Big(x' + c\,\beta\,t'\Big) \tag{164}$$
$$y = y' \tag{165}$$
$$z = z' \tag{166}$$

である。

(163) (164) (165) (166) 式に $t = t_1$ 、 $x = x_1$ 、 $y = y_1$ 、 $z = z_1$ 、 $t' = {t_1}'$ 、 $x' = {x_1}'$ 、 $y' = {y_1}'$ 、 $z' = {z_1}'$ を代入したものと $t = t_2$ 、 $x = x_2$ 、 $y = y_2$ 、 $z = z_2$ 、 $t' = {t_2}'$ 、 $x' = {x_2}'$ 、 $y' = {y_2}'$ 、 $z' = {z_2}'$ を代入したものとから

$$t_2 - t_1 = \gamma\left(\left({t_2}' - {t_1}'\right) + \frac{\beta}{c}\left({x_2}' - {x_1}'\right)\right) \tag{167}$$
$$x_2 - x_1 = \gamma\Big(\left({x_2}' - {x_1}'\right) + c\,\beta\left({t_2}' - {t_1}'\right)\Big) \tag{168}$$
$$y_2 - y_1 = {y_2}' - {y_1}' \tag{169}$$
$$z_2 - z_1 = {z_2}' - {z_1}' \tag{170}$$

が導かれる。

(167) (168) (169) (170) 式を (161) 式に代入すると

$$\begin{aligned} \varDelta s &= \sqrt{c^2\,\gamma^2\left(\left({t_2}' - {t_1}'\right) + \frac{\beta}{c}\left({x_2}' - {x_1}'\right)\right)^2 - \gamma^2\Big(\left({x_2}' - {x_1}'\right) + c\,\beta\left({t_2}' - {t_1}'\right)\Big)^2 - \left({y_2}' - {y_1}'\right)^2 - \left({z_2}' - {z_1}'\right)^2} \\ &= \sqrt{c^2\,\gamma^2\left(1-\beta^2\right)\left({t_2}' - {t_1}'\right)^2 - \gamma^2\left(1-\beta^2\right)\left({x_2}' - {x_1}'\right)^2 - \left({y_2}' - {y_1}'\right)^2 - \left({z_2}' - {z_1}'\right)^2} \\ &= \sqrt{c^2\left({t_2}' - {t_1}'\right)^2 - \left({x_2}' - {x_1}'\right)^2 - \left({y_2}' - {y_1}'\right)^2 - \left({z_2}' - {z_1}'\right)^2} \end{aligned}$$

が得られる。これは、(162) 式である。

問題 17

座標系 S (t, x, y, z) と、S 系に対して 速度 $\begin{pmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ で運動する 座標系 S′ (t', x', y', z') がある。

質点が、S 系から見て 速度 $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$ 、S′ 系から見て 速度 $\boldsymbol{v}' = \begin{pmatrix} {v_x}' \\ {v_y}' \\ {v_z}' \end{pmatrix}$ で運動している。

質点に固定された 座標系 Σ (τ, ξ, η, ζ) がある。Σ 系から見て、質点の位置は $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ である。

S 系から見て、静止しており、質点の運動の軌道上にあって、無限に小さい距離だけ離れた 2 つの点 1 と 2 を考える。質点が点 1 に重なる瞬間と点 2 に重なる瞬間との、質点の位置における t の差を dt 、 t' の差を dt' 、 τ の差を $d\tau$ とする。

真空中の光速を c とする。

1. $d\tau$ を dt と v_x , v_y , v_z , c で表せ。
2. $d\tau$ を dt' と ${v_x}'$, ${v_y}'$, ${v_z}'$, c で表せ。
3. Lorentz 変換と速度の合成則を利用して、 dt' , ${v_x}'$, ${v_y}'$, ${v_z}'$ を dt , v_x , v_y , v_z , V , c で表す式を導け。
4. 前問の結論を 設問 2. の結論に代入せよ。その結果を 設問 1. の結論と比較せよ。
5. $\dfrac{d\tau}{dt}$ を v_x , v_y , v_z , c で表せ。
6. 時刻の任意の 関数 f に対する $\dfrac{df}{d\tau}$ を $\dfrac{df}{dt}$, v_x , v_y , v_z , c で表せ。

問題 17 の答

1. S 系から見た点 1 と 2 の間の距離が無限に小さいことから、明らかに、 dt , $d\tau$ も無限に小さい。無限に小さい時間の間の運動だけを考える場合、質点の運動を等速度運動とみなせる。すなわち、Σ 系を慣性系とみなせる。

   よって、S 系の 全微分 (dt, dx, dy, dz) と Σ 系の 全微分 $(d\tau, d\xi, d\eta, d\zeta)$ の間に、Lorentz 変換が成り立つ。

   S 系に対する Σ 系の速度は $\boldsymbol{v}$ である。 $\boldsymbol{v}$ の大きさを v とする。

   ここでは、 $\boldsymbol{v}$ の方向が x 軸に平行とは限らないので、 (dt, dx, dy, dz) と $(d\tau, d\xi, d\eta, d\zeta)$ の間の Lorentz 変換が (12) (13) (14) (15) 式と同じ形では表されない、すなわち

$$
\begin{aligned}
d\tau &= \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\left(dt - \frac{v}{c^2}\,dx\right) \\
d\xi &= \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\left(dx - v\,dt\right) \\
d\eta &= dy \\
d\zeta &= dz
\end{aligned}
$$

   ではない、ということに留意する必要がある。

   この場合に、 (dt, dx, dy, dz) と $(d\tau, d\xi, d\eta, d\zeta)$ の間の Lorentz 変換の時間成分がどのような式で表されるか、次のように考えることができる。

   S 系および Σ 系の空間座標軸を適切に回転させて x 軸および ξ 軸を $\boldsymbol{v}$ の方向に向けた 2 つの座標系を考えれば、それらの間の Lorentz 変換を上の 4 つの式と同じ形で表すことができるだろう。そのとき、その 2 つの座標系での時刻はそれぞれ t , τ に等しいと考えられる。したがって、 (dt, dx, dy, dz) と $(d\tau, d\xi, d\eta, d\zeta)$ の間の Lorentz 変換の時間成分を表す式は、上の 4 つの式の 1 番目の式と同じ形で、質点の 変位の x 成分 dx を $\boldsymbol{v}$ 方向成分に置き換えたものになる。

   すなわち、S 系から見た 時間 dt の間の質点の変位の進行方向成分を dr として

$$
d\tau = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\left(dt - \frac{v}{c^2}\,dr\right) \tag{171}
$$

   である。

   ここで

$$
\begin{aligned}
dr &= v\,dt \\
v &= \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2}
\end{aligned}
$$

   であるから、これらを (171) 式に代入することにより

$$
d\tau = \sqrt{1 - \frac{{v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2}{c^2}}\,dt \tag{172}
$$

   が得られる。

2. 設問 1. と同様の考え方により

$$
d\tau = \sqrt{1 - \frac{{v_x}'^2 + {v_y}'^2 + {v_z}'^2}{c^2}}\,dt' \tag{173}
$$

   である。

   これは、(172) 式の dt を dt' に、 v_x を ${v_x}'$ に、 v_y を ${v_y}'$ に、 v_z を ${v_z}'$ に置き換えたものになっている。

3. まず、 dt' について考察する。

S 系の 全微分 (dt, dx, dy, dz) と S′ 系の 全微分 (dt', dx', dy', dz') の間の Lorentz 変換の時間成分を表す式は

$$dt' = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}} \left(dt - \frac{V}{c^2}\,dx \right) \tag{174}$$

である。

ここで

$$dx = v_x\,dt$$

であるから、(174) 式に代入することにより

$$dt' = \frac{1 - \dfrac{V\,v_x}{c^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}\,dt \tag{175}$$

が得られる。

次に、 ${v_x}'$, ${v_y}'$, ${v_z}'$ について考察する。

問題 5 で導いた速度の合成則より

$$
\begin{aligned}
{v_x}' &= \frac{v_x - V}{1 - \dfrac{V\,v_x}{c^2}} && (176) \\
{v_y}' &= \frac{v_y\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}{1 - \dfrac{V\,v_x}{c^2}} && (177) \\
{v_z}' &= \frac{v_z\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}{1 - \dfrac{V\,v_x}{c^2}} && (178)
\end{aligned}
$$

である。

4. 前問の結論（ (175) 式・(176) 式・(177) 式・(178) 式）を 設問 2. の結論（ (173) 式）に代入すると

$$\begin{aligned}
d\tau &= \sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(\left(\frac{v_x-V}{1-\dfrac{V\,v_x}{c^2}}\right)^2+\left(\frac{v_y\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}{1-\dfrac{V\,v_x}{c^2}}\right)^2+\left(\frac{v_z\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}{1-\dfrac{V\,v_x}{c^2}}\right)^2\right)}\cdot\frac{1-\dfrac{V\,v_x}{c^2}}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}\,dt \\
&= \sqrt{\left(1-\frac{V\,v_x}{c^2}\right)^2-\left(\frac{v_x}{c}-\frac{V}{c}\right)^2-\left(\frac{v_y}{c}\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\right)^2-\left(\frac{v_z}{c}\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\right)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}\,dt \\
&= \sqrt{1-\frac{2\,V\,v_x}{c^2}+\frac{V^2\,{v_x}^2}{c^4}-\frac{{v_x}^2}{c^2}+\frac{2\,V\,v_x}{c^2}-\frac{V^2}{c^2}-\frac{{v_y}^2}{c^2}+\frac{V^2\,{v_y}^2}{c^4}-\frac{{v_z}^2}{c^2}+\frac{V^2\,{v_z}^2}{c^4}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}\,dt \\
&= \sqrt{\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}{c^2}\right)}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}\,dt \\
&= \sqrt{1-\frac{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}{c^2}}\,dt
\end{aligned}$$

となる。

この最後の表現は、 設問 1. の結論（ (172) 式）の右辺と一致する。

問題の当初の前提では $d\tau$ がそもそも観測者の座標系と無関係に定義される量であり、その前提の下で、 設問 1. と 設問 2. の結論によって、 $d\tau$ の S 系の観測者による表現（ (172) 式）と S′ 系の観測者による表現（ (173) 式）とが同じ形になることが確かめられた。

それに対して、 設問 4. の結果は、逆に、 $d\tau$ が S 系の観測者によって (172) 式で定義される量である場合に、(173) 式が成り立つこと、すなわち、S′ 系の観測者によって同じ形で定義される $d\tau'$ が $d\tau$ に等しいこと、さらに言い換えて、 $d\tau$ が慣性系の選び方と無関係に定まる量であること、を示すものと解釈できる。

5. (172) 式を変形して

$$\frac{d\tau}{dt}=\sqrt{1-\frac{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}{c^2}}$$

を得る。

6. 一般に

$$\frac{df}{dt}=\frac{d\tau}{dt}\,\frac{df}{d\tau}$$

が成り立つ。

これより

$$\frac{df}{d\tau} = \frac{1}{\dfrac{d\tau}{dt}}\,\frac{df}{dt}$$

前問の結論を代入して

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}{c^2}}}\,\frac{df}{dt}$$

を得る。

問題 18

座標系 S (t, x, y, z) と、S 系に対して 速度 $\begin{pmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ で運動する 座標系 S′ (t', x', y', z') がある。

質点が、S 系から見て 速度 $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$ 、S′ 系から見て 速度 $\boldsymbol{v}' = \begin{pmatrix} {v_x}' \\ {v_y}' \\ {v_z}' \end{pmatrix}$ で運動している。S 系から見た質点の座標を $\boldsymbol{r}$ 、S′ 系から見た質点の座標を $\boldsymbol{r}'$ とする。

問題 5 で導いたように、 $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{v}'$ とを関係づける変換は、Lorentz 変換とは異なる、非線形の複雑な変換である。しかし、S 系の時空と S′ 系の時空とが線形変換である Lorentz 変換によって関係づけられるのだから、空間座標の変化率である速度も、本質的な要素は Lorentz 変換によって 2 つの系の間の関係が与えられるのではないかと考えられる。

そこで、「速度の本質的な要素を表す量」 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u}'$ が、 $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}'$ とは別に存在するものと考えてみる。具体的には、質点の固有時間を τ として、S 系で $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = \dfrac{d\boldsymbol{r}}{d\tau}$ 、S′ 系で $\boldsymbol{u}' = \begin{pmatrix} {u_x}' \\ {u_y}' \\ {u_z}' \end{pmatrix} = \dfrac{d\boldsymbol{r}'}{d\tau}$ とする。

真空中の光速を c 、 $\beta = \dfrac{V}{c}$ 、 $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ とする。

1. $\boldsymbol{u}$ の各成分を $\boldsymbol{v}$ の各成分と c で表せ。
2. $\boldsymbol{u}'$ の各成分を $\boldsymbol{v}'$ の各成分と c で表せ。
3. $\boldsymbol{u}$ および $\boldsymbol{u}'$ の物理的な意味を説明せよ。
4. 設問 2. の結論の ${v_x}'$, ${v_y}'$, ${v_z}'$ に速度の合成則を代入し、 $\boldsymbol{u}'$ の各成分を $\boldsymbol{v}$ の各成分と c , β , γ で表す式を導け。
5. ${u_x}'$ を
$$ {u_x}' = \gamma\, u_x - \gamma\, \beta\, f(v_x, v_y, v_z) $$
の形で表し、 $f(v_x, v_y, v_z)$ を定めよ。ただし、 $f(v_x, v_y, v_z)$ は、 v_x , v_y , v_z と c だけを含む式。
6. ${u_y}'$ を u_y で表せ。 ${u_z}'$ を u_z で表せ。

Lorentz 変換では、 $\boldsymbol{r}'$ が、 $\boldsymbol{r}$ と t の交じり合った線型結合で表される。したがって、 $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{u}'$ が Lorentz 変換で関係づけられるならば、 $\boldsymbol{u}'$ は、 $\boldsymbol{u}$ と「 $\boldsymbol{u}$ と同じ概念を時間軸に適用して導かれる量」の交じり合った線型結合で表されるだろう。

そこで、「 $\boldsymbol{u}$ と同じ概念を時間軸に適用して導かれる量」 u_t , ${u_t}'$ を考えてみる。具体的には、質点の位置における S 系の時刻を t 、S′ 系の時刻を t' として、S 系で $u_t = \dfrac{d(c\,t)}{d\tau}$ 、S′ 系で ${u_t}' = \dfrac{d(c\,t')}{d\tau}$ とする。

7. u_t を $\boldsymbol{v}$ の各成分と c で表せ。
8. ${u_t}'$ を $\boldsymbol{v}'$ の各成分と c で表せ。
9. 設問 5. の $f(v_x, v_y, v_z)$ を u_t で表せ。
10. ${u_t}'$ を u_t , u_x , β , γ で表せ。

4 元ベクトル $\begin{pmatrix} u_t \\ u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$ を u^μ （ $\mu = 0, 1, 2, 3$ ）と表記し、 $\begin{pmatrix} {u_t}' \\ {u_x}' \\ {u_y}' \\ {u_z}' \end{pmatrix}$ を u'^ν （ $\nu = 0, 1, 2, 3$ ） と表記する。

11. u'^ν が u^μ の Lorentz 変換によって与えられることを説明せよ。

問題 18 の答

1.

$$\boldsymbol{u} = \frac{d\boldsymbol{r}}{d\tau}$$

問題 17 の 設問 6. の結論を使って

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}{c^2}}}\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}{c^2}}}\boldsymbol{v}$$

である。

これより

$$u_x = \frac{v_x}{\sqrt{1-\frac{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}{c^2}}} \tag{179}$$

$$u_y = \frac{v_y}{\sqrt{1-\frac{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}{c^2}}} \tag{180}$$

$$u_z = \frac{v_z}{\sqrt{1-\frac{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}{c^2}}} \tag{181}$$

である。

2. 設問 1. と同様の考え方により

$${u_x}' = \frac{{v_x}'}{\sqrt{1-\frac{{v_x}'^2+{v_y}'^2+{v_z}'^2}{c^2}}} \tag{182}$$

$${u_y}' = \frac{{v_y}'}{\sqrt{1-\frac{{v_x}'^2+{v_y}'^2+{v_z}'^2}{c^2}}} \tag{183}$$

$${u_z}' = \frac{{v_z}'}{\sqrt{1-\frac{{v_x}'^2+{v_y}'^2+{v_z}'^2}{c^2}}} \tag{184}$$

である。

3. $\boldsymbol{u}$ および $\boldsymbol{u}'$ は、質点の 固有時間 τ が単位量だけ進む間の、慣性系から見た質点の変位である。

これは、速度の概念を時間と空間の相対性の下でより高い普遍性を持つように修正して得られる新しい概念の量と解釈できる。

速度とは、観測者から見た単位時間あたりの変位、という概念である。このような「A あたりの B」という概念は、統一した条件の下で B を比較するためのものであり、その条件が「A あたり」なのだと考えられる。

ところが、この、速度の概念における「単位時間あたり」という条件は、時間の相対性の下では、観測者に依存して異なる条件となってしまう。これでは、統一した条件の下で変位を比較するための概念にならない。

そこで、「時間」の代わりに Lorentz 不変量である「固有時間」を用いて、速度に似た新しい概念を構築するのである。すると、その新しい概念は、統一した条件の下で変位を比較するための概念になり得るであろう。

その新しい概念の量が、 $\boldsymbol{u}$ および $\boldsymbol{u}'$ である。

4. **問題 5** で導いた速度の合成則より

$$v_x{}' = \frac{v_x - V}{1 - \dfrac{V\,v_x}{c^2}} \tag{185}$$

$$v_y{}' = \frac{v_y\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}{1 - \dfrac{V\,v_x}{c^2}} \tag{186}$$

$$v_z{}' = \frac{v_z\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}{1 - \dfrac{V\,v_x}{c^2}} \tag{187}$$

である。 $1 - \dfrac{V\,v_x}{c^2}$ が正であることに留意しておく。

(185) 式・(186) 式・(187) 式を 設問 2. の結論（ (182) 式・(183) 式・(184) 式）に代入すると

$$\begin{aligned}
u_x{}' &= \frac{\dfrac{v_x - V}{1 - \dfrac{V\,v_x}{c^2}}}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{c^2}\left(\left(\dfrac{v_x - V}{1 - \dfrac{V\,v_x}{c^2}}\right)^2 + \left(\dfrac{v_y\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}{1 - \dfrac{V\,v_x}{c^2}}\right)^2 + \left(\dfrac{v_z\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}{1 - \dfrac{V\,v_x}{c^2}}\right)^2\right)}} \\
&= \frac{v_x - V}{\sqrt{\left(1 - \dfrac{V\,v_x}{c^2}\right)^2 - \dfrac{1}{c^2}\left(\left(v_x - V\right)^2 + \left(v_y\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}\right)^2 + \left(v_z\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}\right)^2\right)}} \\
&= \frac{v_x - V}{\sqrt{1 - \dfrac{2\,V\,v_x}{c^2} + \dfrac{V^2\,{v_x}^2}{c^4} - \dfrac{{v_x}^2}{c^2} + \dfrac{2\,V\,v_x}{c^2} - \dfrac{V^2}{c^2} - \dfrac{{v_y}^2}{c^2} + \dfrac{V^2\,{v_y}^2}{c^4} - \dfrac{{v_z}^2}{c^2} + \dfrac{V^2\,{v_z}^2}{c^4}}} \\
&= \frac{v_x - V}{\sqrt{\left(1 - \dfrac{{v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2}{c^2}\right)\left(1 - \dfrac{V^2}{c^2}\right)}} \\
&= \frac{\gamma\left(v_x - c\,\beta\right)}{\sqrt{1 - \dfrac{{v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2}{c^2}}}
\end{aligned} \tag{188}$$

$$
\begin{aligned}
{u_y}' &= \frac{\dfrac{v_y\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}{1-\dfrac{V\,v_x}{c^2}}}{\sqrt{1-\dfrac{1}{c^2}\left(\left(\dfrac{v_x-V}{1-\dfrac{V\,v_x}{c^2}}\right)^2+\left(\dfrac{v_y\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}{1-\dfrac{V\,v_x}{c^2}}\right)^2+\left(\dfrac{v_z\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}{1-\dfrac{V\,v_x}{c^2}}\right)^2\right)}} \\
&= \frac{v_y\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}{\sqrt{\left(1-\dfrac{V\,v_x}{c^2}\right)^2-\dfrac{1}{c^2}\left(\left(v_x-V\right)^2+\left(v_y\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}\right)^2+\left(v_z\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}\right)^2\right)}} \\
&= \frac{v_y\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}{\sqrt{\left(1-\dfrac{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}{c^2}\right)\left(1-\dfrac{V^2}{c^2}\right)}} \\
&= \frac{v_y}{\sqrt{1-\dfrac{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}{c^2}}} \qquad (189)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{u_z}' &= \frac{\dfrac{v_z\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}{1-\dfrac{V\,v_x}{c^2}}}{\sqrt{1-\dfrac{1}{c^2}\left(\left(\dfrac{v_x-V}{1-\dfrac{V\,v_x}{c^2}}\right)^2+\left(\dfrac{v_y\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}{1-\dfrac{V\,v_x}{c^2}}\right)^2+\left(\dfrac{v_z\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}{1-\dfrac{V\,v_x}{c^2}}\right)^2\right)}} \\
&= \frac{v_z}{\sqrt{1-\dfrac{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}{c^2}}} \qquad (190)
\end{aligned}
$$

を得る。

5. (179) 式と (188) 式より

$$
{u_x}' = \gamma\,u_x - \gamma\,\beta\,\frac{c}{\sqrt{1-\dfrac{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}{c^2}}} \qquad (191)
$$

であることがわかる。この式は、 ${u_x}'$ を ${u_x}' = \gamma\,u_x - \gamma\,\beta\,f(v_x, v_y, v_z)$ の形で表している。

すなわち

$$
f(v_x, v_y, v_z) = \frac{c}{\sqrt{1-\dfrac{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}{c^2}}} \qquad (192)
$$

である。

6. (180) 式と (189) 式より
$$u_y{}' = u_y \tag{193}$$
であることがわかる。
(181) 式と (190) 式より
$$u_z{}' = u_z \tag{194}$$
であることがわかる。

7.
$$u_t = \frac{d(c\,t)}{d\tau}$$
問題 17 の 設問 6. の結論を使って
$$= \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}{c^2}}}\frac{d(c\,t)}{dt}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}{c^2}}}\,c$$
$$= \frac{c}{\sqrt{1-\dfrac{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}{c^2}}} \tag{195}$$
である。

8. 設問 7. と同様の考え方により
$$u_t{}' = \frac{c}{\sqrt{1-\dfrac{{v_x}'^2+{v_y}'^2+{v_z}'^2}{c^2}}} \tag{196}$$
である。

9. (192) 式と (195) 式より
$$f(v_x, v_y, v_z) = u_t$$
であることがわかる。
すなわち、(191) 式を
$$u_x{}' = \gamma\,u_x - \gamma\,\beta\,u_t \tag{197}$$
と表すことができる。

10. (185) 式・(186) 式・(187) 式を (196) 式に代入すると

$$
{u_t}' = \frac{c}{\sqrt{1-\dfrac{1}{c^2}\left(\left(\dfrac{v_x-V}{1-\dfrac{V\,v_x}{c^2}}\right)^2+\left(\dfrac{v_y\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}{1-\dfrac{V\,v_x}{c^2}}\right)^2+\left(\dfrac{v_z\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}{1-\dfrac{V\,v_x}{c^2}}\right)^2\right)}}
$$

$1-\dfrac{V\,v_x}{c^2}$ が正であることに留意して

$$
\begin{aligned}
&= \frac{c\left(1-\dfrac{V\,v_x}{c^2}\right)}{\sqrt{\left(1-\dfrac{V\,v_x}{c^2}\right)^2-\dfrac{1}{c^2}\left(\left(v_x-V\right)^2+\left(v_y\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}\right)^2+\left(v_z\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}\right)^2\right)}}\\
&= \frac{c\left(1-\dfrac{V\,v_x}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\dfrac{2\,V\,v_x}{c^2}+\dfrac{V^2\,{v_x}^2}{c^4}-\dfrac{{v_x}^2}{c^2}+\dfrac{2\,V\,v_x}{c^2}-\dfrac{V^2}{c^2}-\dfrac{{v_y}^2}{c^2}+\dfrac{V^2\,{v_y}^2}{c^4}-\dfrac{{v_z}^2}{c^2}+\dfrac{V^2\,{v_z}^2}{c^4}}}\\
&= \frac{c\left(1-\dfrac{V\,v_x}{c^2}\right)}{\sqrt{\left(1-\dfrac{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}{c^2}\right)\left(1-\dfrac{V^2}{c^2}\right)}}\\
&= \frac{\gamma\left(c-\beta\,v_x\right)}{\sqrt{1-\dfrac{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}{c^2}}} \qquad (198)
\end{aligned}
$$

を得る。

(179) 式と (195) 式と (198) 式より

$$
{u_t}' = \gamma\,u_t-\gamma\,\beta\,u_x \qquad (199)
$$

であることがわかる。

11. (199) 式・(197) 式・(193) 式・(194) 式の 4 つの式を、まとめて

$$
\begin{pmatrix} {u_t}' \\ {u_x}' \\ {u_y}' \\ {u_z}' \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} u_t \\ u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \qquad (200)
$$

と表すことができる。ただし

$$
L = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\,\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\,\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

である。(200) 式は、縦ベクトルとして表した u'^{ν} （左辺）が、縦ベクトルとして表した u^{μ} に L を左から掛けたもの（右辺）に等しい、ということを表す。

行列 L は、Lorentz 変換を与える行列（ (106) 式）にほかならない。すなわち、 L は、縦ベクトルに左から掛けることでそのベクトルを Lorentz 変換する行列である。

したがって、(200) 式によって、 u'^{ν} が u^{μ} の Lorentz 変換によって与えられることが示された、と言える。

3.4 運動方程式

真空中の光速を c とする。

Newton の運動方程式

Newton の運動方程式は、質点にはたらく力を $\boldsymbol{F}$ 、質点の質量を m 、速度を $\boldsymbol{v}$ 、運動量を $\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}$ として

$$\boldsymbol{F}=\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}$$

と表される。これは、 $\boldsymbol{F}$ の定義と解釈できる。

相対論的な運動方程式

非相対論の運動量にならって、質点の **4 元運動量** p^μ を定義する。質点の静止質量を m 、4 元速度を u^μ （ $\mu=0,1,2,3$ ）として

$$p^\mu=m\,u^\mu$$

とする。

4 元速度を導入したときと同様の考え方をすると、質量と加速度の積である力も、本質的には Lorentz 変換によって互いに等速度運動する座標系の間の関係が与えられるのではないかと考えられる。

そこで、Newton の運動方程式にならって、質点にはたらく **4 元力** f^μ を定義する。質点の固有時間を τ として

$$f^\mu=\frac{dp^\mu}{d\tau} \tag{201}$$

とする。

この f^μ は、互いに等速度運動する座標系の間の関係が Lorentz 変換によって与えられる。(201) 式を運動方程式と呼べば、これは共変形式になっている。

相対論的な運動量と力

(201) 式を基礎として相対論的な力学の体系を構築する。その中で、非相対論的な運動量に対応する相対論的な（4 元ベクトルでない）運動量、非相対論的な力に対応する相対論的な（4 元ベクトルでない）力を考える。

相対論的な（4 元ベクトルでない） 運動量 $\boldsymbol{p}$ を

$$\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix} p^1 \\ p^2 \\ p^3 \end{pmatrix} \tag{202}$$

で定義する。質点の速度を $\boldsymbol{v}$ とし、 $v=|\boldsymbol{v}|$ とすると、 $\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix}=\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\boldsymbol{v}$ であるから

$$\boldsymbol{p}=\frac{m}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\boldsymbol{v} \tag{203}$$

である。

相対論的な（4 元ベクトルでない） 力 $\boldsymbol{F}$ を

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} &= \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} \\ &= \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \\ f^3 \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{204}$$

で定義する。(204) 式は、 $\dfrac{v}{c}\to 0$ の極限で非相対論的な力と一致する。

相対論的な仕事とエネルギー

4 元力と相対論的な力の定義から、4 元力の第 0 成分 f^0 が、

$$f^0 = \frac{\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}}{c\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$$

であることが導ける。

$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}$ を、相対論的な仕事率と定義する。

仕事の概念はエネルギーの概念に結びつく。つまり、非相対論的な力学にならって、相対論的な エネルギー E を

$$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v} = \frac{dE}{dt}$$

を満たすように定義できると考えられる。このような E が定義できれば、相対論的な運動方程式より

$$\frac{dE}{dt} = c\,\frac{dp^0}{dt}$$

が成り立つことが示せる。

以上の考察を踏まえて、 E の定義として最も相応しいと考えられるのが、次である。

相対論的な エネルギー E を

$$E = c\,p^0 \tag{205}$$

で定義する。

相対論的な運動方程式の解釈

力学の基礎概念に関する以上の定義は、以下のような解釈を加えて理解することができる。

まず、運動量を質量と速度の積と考えるならば、(203) 式は、相対論的な 質量 m_r の存在を示すと解釈することができる。 m_r は

$$m_r = \frac{m}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$$

である。これより、相対論的には、質点の速さが大きければ、質量も大きいことがわかる。

次に、(204) 式は、相対論的にも（非相対論と同様に）力が運動量の時間変化率であることを示すと解釈できる。

同時に、(204) 式は、 $\boldsymbol{p} = m_r\boldsymbol{v}$ と考えることにより

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} &= \frac{d}{dt}\big(m_r\,\boldsymbol{v}\big)\\ &= \frac{dm_r}{dt}\,\boldsymbol{v} + m_r\,\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\end{aligned}$$

となり、速さが大きいほど一定の $\boldsymbol{F}$ に対する加速度の大きさが小さくなることも示している。 $\dfrac{v}{c}\to 1$ の極限では、$m_r\to\infty$ となるため、加速度が 0 になる。

このことから、質点の速さは光速を超えられないと考えられる。

相対論的な運動方程式は正しいか

ここで導入したいくつかの定義は、いずれも、理論が「美しく」なるように、恣意的に式を選んで定めたものである。だから、仮に、これらの定義の上に矛盾のない力学の理論体系を構築することができたとしても、これらが正しいという論理的な根拠は、まったくない。

これらの数式が実際に自然の性質を表すものなのかどうかは、これらの定義の上に構築される理論から未知の現象を予言し、それが本当に起こるかどうかを実験で検証することでしか、判断できない。

問題 19

4 元運動量と 4 元力の物理的な意味を考えよう。

観測者の座標系を (t, x, y, z) とする。

静止質量 m の質点が、 速度 $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$ で運動している。質点は、相対論的な 力 $\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$ を受けている。質点は、相対論的な エネルギー E を持っている。

質点の固有時間を τ 、4 元速度を u^μ （ $\mu = 0, 1, 2, 3$ ）とし、 4 元運動量 p^μ と 4 元力 f^μ を

$$p^\mu = m\, u^\mu \tag{206}$$

$$f^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau} \tag{207}$$

で定義する。

$\boldsymbol{F}$ の定義は

$$\boldsymbol{F} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} p^1 \\ p^2 \\ p^3 \end{pmatrix} \tag{208}$$

である。

真空中の光速を c とする。

1. u^μ が反変ベクトルであることを根拠に、 p^μ と f^μ が反変ベクトルであることを示せ。
2. p^1, p^2, p^3 を $\boldsymbol{v}$ の各成分と m, c で表す式を求めよ。
3. f^1, f^2, f^3 を $\boldsymbol{v}$, $\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt}$ の各成分と m, c で表す式を求めよ。
4. f^1, f^2, f^3 を $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{v}$ の各成分と c で表す式を導け。
5. f^0 を $\boldsymbol{v}$, $\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt}$ の各成分と m, c で表す式を求めよ。
6. $\boldsymbol{F}$ と $\boldsymbol{v}$ の スカラー積 $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{v}$, $\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt}$ の各成分と m, c で表せ。
7. f^0 を $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{v}$ の各成分と c で表せ。
8. $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} = \dfrac{dE}{dt}$ が成り立つとして、 $\dfrac{dp^0}{dt}$ を $\dfrac{dE}{dt}$, c で表せ。
9. p^0 を E, c および 1 個 の任意定数で表せ。

問題 19 の答

1. 第 1 に、 p^μ が反変ベクトルであることを示す。

   静止質量 m は、観測者に依存しない、質点に固有の量である。つまり、 m は、Lorentz 不変量、すなわち、スカラーである。

   u^μ が反変ベクトルであるから、それにスカラーである m を掛けた $m\,u^\mu$ も反変ベクトルである。すなわち、(206) 式の右辺は、反変ベクトルである。右辺が反変ベクトルであるから、それと等号で結ばれた左辺も、当然、反変ベクトルである。ゆえに、 p^μ は反変ベクトルである。

   第 2 に、 f^μ が反変ベクトルであることを示す。

   固有時間 τ は、観測者に依存しない、質点に固有の量である。つまり、 τ は、Lorentz 不変量、すなわち、スカラーである。

   p^μ が反変ベクトルであるから、それをスカラーである τ で微分した $\dfrac{dp^\mu}{d\tau}$ も反変ベクトルである。すなわち、(207) 式の右辺は、反変ベクトルである。右辺が反変ベクトルであるから、それと等号で結ばれた左辺も、当然、反変ベクトルである。ゆえに、 f^μ は反変ベクトルである。

2. p^μ の定義（ (206) 式）より

$$
\begin{aligned}
p^1 &= m\,u^1 \\
p^2 &= m\,u^2 \\
p^3 &= m\,u^3
\end{aligned}
$$

   である。

   u^1 , u^2 , u^3 は、それぞれ、 **問題 18** の u_x , u_y , u_z である。したがって、 **問題 18** の 設問 1. の結論より

$$
\begin{aligned}
u^1 &= \frac{v_x}{\sqrt{1-\dfrac{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}{c^2}}} \\
u^2 &= \frac{v_y}{\sqrt{1-\dfrac{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}{c^2}}} \\
u^3 &= \frac{v_z}{\sqrt{1-\dfrac{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}{c^2}}}
\end{aligned}
$$

   である。

   以上より

$$
p^1 = \frac{m\,v_x}{\sqrt{1-\dfrac{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}{c^2}}} \tag{209}
$$

$$
p^2 = \frac{m\,v_y}{\sqrt{1-\dfrac{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}{c^2}}} \tag{210}
$$

$$
p^3 = \frac{m\,v_z}{\sqrt{1-\dfrac{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}{c^2}}} \tag{211}
$$

   である。

3. f^μ の定義（ (207) 式）より

$$
\begin{aligned}
f^1 &= \frac{dp^1}{d\tau} \\
f^2 &= \frac{dp^2}{d\tau} \\
f^3 &= \frac{dp^3}{d\tau}
\end{aligned}
$$

である。

問題 17 の 設問 6. の結論を使うと

$$
f^1 = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}{c^2}}}\frac{dp^1}{dt} \tag{212}
$$

$$
f^2 = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}{c^2}}}\frac{dp^2}{dt} \tag{213}
$$

$$
f^3 = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}{c^2}}}\frac{dp^3}{dt} \tag{214}
$$

となる。

(212) 式に (209) 式を代入して

$$
\begin{aligned}
f^1 &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}{c^2}}}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{m\,v_x}{\sqrt{1-\frac{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}{c^2}}}\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}{c^2}}}\cdot\frac{m\left(\frac{dv_x}{dt}\sqrt{1-\frac{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}{c^2}}-v_x\frac{d}{dt}\sqrt{1-\frac{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}{c^2}}\right)}{1-\frac{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}{c^2}}\\
&= m\left(\frac{\frac{dv_x}{dt}}{1-\frac{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}{c^2}}-\frac{v_x}{\left(1-\frac{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{d}{dt}\sqrt{1-\frac{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}{c^2}}\right)\\
&= m\left(\frac{\frac{dv_x}{dt}}{1-\frac{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}{c^2}}-\frac{v_x}{\left(1-\frac{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{-\frac{2\,v_x}{c^2}\frac{dv_x}{dt}-\frac{2\,v_y}{c^2}\frac{dv_y}{dt}-\frac{2\,v_z}{c^2}\frac{dv_z}{dt}}{\sqrt{1-\frac{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}{c^2}}}\right)\right)\\
&= m\left(\frac{\frac{dv_x}{dt}}{1-\frac{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}{c^2}}+\frac{\frac{v_x}{c^2}\left(v_x\frac{dv_x}{dt}+v_y\frac{dv_y}{dt}+v_z\frac{dv_z}{dt}\right)}{\left(1-\frac{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}{c^2}\right)^2}\right) \qquad (215)
\end{aligned}
$$

(213) 式に (210) 式を代入して

$$
f^2 = m\left(\frac{\frac{dv_y}{dt}}{1-\frac{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}{c^2}}+\frac{\frac{v_y}{c^2}\left(v_x\frac{dv_x}{dt}+v_y\frac{dv_y}{dt}+v_z\frac{dv_z}{dt}\right)}{\left(1-\frac{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}{c^2}\right)^2}\right) \qquad (216)
$$

(214) 式に (211) 式を代入して

$$
f^3 = m\left(\frac{\frac{dv_z}{dt}}{1-\frac{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}{c^2}}+\frac{\frac{v_z}{c^2}\left(v_x\frac{dv_x}{dt}+v_y\frac{dv_y}{dt}+v_z\frac{dv_z}{dt}\right)}{\left(1-\frac{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}{c^2}\right)^2}\right) \qquad (217)
$$

を得る。

4. $\boldsymbol{F}$ の定義（(208) 式）より

$$F_x = \frac{dp^1}{dt} \tag{218}$$
$$F_y = \frac{dp^2}{dt} \tag{219}$$
$$F_z = \frac{dp^3}{dt} \tag{220}$$

である。

(212) 式と (218) 式より

$$f^1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{{v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2}{c^2}}} F_x \tag{221}$$

(213) 式と (219) 式より

$$f^2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{{v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2}{c^2}}} F_y \tag{222}$$

(214) 式と (220) 式より

$$f^3 = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{{v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2}{c^2}}} F_z \tag{223}$$

が導かれる。

5. f^μ の定義（ (207) 式）より

$$f^0 \quad = \quad \frac{dp^0}{d\tau}$$

である。

問題 17 の 設問 6. の結論を使うと

$$f^0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{{v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2}{c^2}}} \frac{dp^0}{dt} \tag{224}$$

となる。

p^μ の定義（ (206) 式）より

$$p^0 = m\, u^0 \tag{225}$$

である。

u^0 は、 **問題 18** の u_t である。したがって、 **問題 18** の 設問 1. の結論より

$$u^0 = \frac{c}{\sqrt{1 - \dfrac{{v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2}{c^2}}} \tag{226}$$

である。

(226) 式を (225) 式に代入し、その結果をさらに (224) 式に代入して

$$\begin{aligned}
f^0 \quad &= \quad \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{{v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2}{c^2}}} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{m\, c}{\sqrt{1 - \dfrac{{v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2}{c^2}}} \right) \\
&= \quad \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{{v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2}{c^2}}} \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{m\, c \left(-\dfrac{2\, v_x}{c^2} \dfrac{dv_x}{dt} - \dfrac{2\, v_y}{c^2} \dfrac{dv_y}{dt} - \dfrac{2\, v_z}{c^2} \dfrac{dv_z}{dt} \right)}{\left(1 - \dfrac{{v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2}{c^2} \right)^{\frac{3}{2}}} \right) \\
&= \quad m \cdot \frac{\dfrac{1}{c} \left(v_x \dfrac{dv_x}{dt} + v_y \dfrac{dv_y}{dt} + v_z \dfrac{dv_z}{dt} \right)}{\left(1 - \dfrac{{v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2}{c^2} \right)^2}
\end{aligned} \tag{227}$$

を得る。

6.

$$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v} \quad = \quad F_x\,v_x + F_y\,v_y + F_z\,v_z$$

(221) 式・(222) 式・(223) 式を F_x , F_y , F_z について解いたものを代入して

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{1-\frac{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}{c^2}}\,f^1\cdot v_x + \sqrt{1-\frac{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}{c^2}}\,f^2\cdot v_y + \sqrt{1-\frac{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}{c^2}}\,f^3\cdot v_z \\
&= \sqrt{1-\frac{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}{c^2}}\left(f^1\,v_x + f^2\,v_y + f^3\,v_z\right)
\end{aligned}$$

(215) 式・(216) 式・(217) 式を代入して

$$\begin{aligned}
= \sqrt{1-\frac{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}{c^2}}\Biggl(& m\left(\frac{\dfrac{dv_x}{dt}}{1-\dfrac{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}{c^2}} + \frac{\dfrac{v_x}{c^2}\left(v_x\,\dfrac{dv_x}{dt}+v_y\,\dfrac{dv_y}{dt}+v_z\,\dfrac{dv_z}{dt}\right)}{\left(1-\dfrac{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}{c^2}\right)^2}\right)\cdot v_x \\
& + m\left(\frac{\dfrac{dv_y}{dt}}{1-\dfrac{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}{c^2}} + \frac{\dfrac{v_y}{c^2}\left(v_x\,\dfrac{dv_x}{dt}+v_y\,\dfrac{dv_y}{dt}+v_z\,\dfrac{dv_z}{dt}\right)}{\left(1-\dfrac{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}{c^2}\right)^2}\right)\cdot v_y \\
& + m\left(\frac{\dfrac{dv_z}{dt}}{1-\dfrac{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}{c^2}} + \frac{\dfrac{v_z}{c^2}\left(v_x\,\dfrac{dv_x}{dt}+v_y\,\dfrac{dv_y}{dt}+v_z\,\dfrac{dv_z}{dt}\right)}{\left(1-\dfrac{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}{c^2}\right)^2}\right)\cdot v_z\Biggr) \\
= m\sqrt{1-\frac{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}{c^2}}\Biggl(& \frac{v_x\,\dfrac{dv_x}{dt}}{1-\dfrac{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}{c^2}} + \frac{\dfrac{{v_x}^2}{c^2}\left(v_x\,\dfrac{dv_x}{dt}+v_y\,\dfrac{dv_y}{dt}+v_z\,\dfrac{dv_z}{dt}\right)}{\left(1-\dfrac{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}{c^2}\right)^2} \\
& + \frac{v_y\,\dfrac{dv_y}{dt}}{1-\dfrac{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}{c^2}} + \frac{\dfrac{{v_y}^2}{c^2}\left(v_x\,\dfrac{dv_x}{dt}+v_y\,\dfrac{dv_y}{dt}+v_z\,\dfrac{dv_z}{dt}\right)}{\left(1-\dfrac{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}{c^2}\right)^2} \\
& + \frac{v_z\,\dfrac{dv_z}{dt}}{1-\dfrac{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}{c^2}} + \frac{\dfrac{{v_z}^2}{c^2}\left(v_x\,\dfrac{dv_x}{dt}+v_y\,\dfrac{dv_y}{dt}+v_z\,\dfrac{dv_z}{dt}\right)}{\left(1-\dfrac{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}{c^2}\right)^2}\Biggr) \\
= m\sqrt{1-\frac{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}{c^2}}\Biggl(& \frac{v_x\,\dfrac{dv_x}{dt}+v_y\,\dfrac{dv_y}{dt}+v_z\,\dfrac{dv_z}{dt}}{1-\dfrac{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}{c^2}} \\
& + \frac{\left(\dfrac{{v_x}^2}{c^2}+\dfrac{{v_y}^2}{c^2}+\dfrac{{v_z}^2}{c^2}\right)\left(v_x\,\dfrac{dv_x}{dt}+v_y\,\dfrac{dv_y}{dt}+v_z\,\dfrac{dv_z}{dt}\right)}{\left(1-\dfrac{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}{c^2}\right)^2}\Biggr)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= m\sqrt{1-\frac{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}{c^2}}\left(v_x\frac{dv_x}{dt}+v_y\frac{dv_y}{dt}+v_z\frac{dv_z}{dt}\right) \\
&\qquad \times\left(\frac{1}{1-\frac{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}{c^2}}+\frac{\frac{{v_x}^2}{c^2}+\frac{{v_y}^2}{c^2}+\frac{{v_z}^2}{c^2}}{\left(1-\frac{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}{c^2}\right)^2}\right) \\
&= m\sqrt{1-\frac{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}{c^2}}\left(v_x\frac{dv_x}{dt}+v_y\frac{dv_y}{dt}+v_z\frac{dv_z}{dt}\right) \\
&\qquad \times\frac{1-\frac{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}{c^2}+\frac{{v_x}^2}{c^2}+\frac{{v_y}^2}{c^2}+\frac{{v_z}^2}{c^2}}{\left(1-\frac{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}{c^2}\right)^2} \\
&= m\sqrt{1-\frac{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}{c^2}}\left(v_x\frac{dv_x}{dt}+v_y\frac{dv_y}{dt}+v_z\frac{dv_z}{dt}\right)\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}{c^2}\right)^2} \\
&= m\cdot\frac{v_x\frac{dv_x}{dt}+v_y\frac{dv_y}{dt}+v_z\frac{dv_z}{dt}}{\left(1-\frac{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \qquad (228)
\end{aligned}
$$

7. (227) 式と (228) 式より

$$f^0=\frac{\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}}{c\sqrt{1-\frac{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}{c^2}}} \qquad (229)$$

であることがわかる。

8. (224) 式より

$$\frac{dp^0}{dt} = \sqrt{1-\frac{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}{c^2}}\,f^0$$

(229) 式を代入して

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{1-\frac{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}{c^2}}\cdot\frac{\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}}{c\sqrt{1-\frac{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}{c^2}}} \\
&= \frac{\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}}{c}
\end{aligned}
$$

である。

$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}=\frac{dE}{dt}$ が成り立つとすると、これより

$$\frac{dp^0}{dt}=\frac{1}{c}\frac{dE}{dt} \qquad (230)$$

が得られる。

9. (230) 式を t で不定積分することにより、 A を任意定数として

$$p^0=\frac{E}{c}+A$$

であることが導かれる。

問題 20

質点のエネルギーを表す、いろいろな形の式を導こう。

観測者の座標系を (t, x, y, z) とする。

静止質量 m の質点が 速度 $\boldsymbol{v}$ で運動している。 $v = |\boldsymbol{v}|$ とする。質点の固有時間を τ 、4 元位置を x^μ （ $\mu = 0, 1, 2, 3$ ）、4 元速度を u^μ 、4 元運動量を p^μ 、相対論的な運動量を $\boldsymbol{p}$ 、相対論的なエネルギーを E とする。 $p = |\boldsymbol{p}|$ とする。

u^μ , p^μ , $\boldsymbol{p}$, E の定義は

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

$$p^\mu = m\, u^\mu$$

$$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} p^1 \\ p^2 \\ p^3 \end{pmatrix}$$

$$E = c\, p^0$$

である。

1. u^μ の定義から導かれる、 u^0 を v , c で表す式を書け。
2. p^μ の定義から導かれる、 p^0 を v , m , c で表す式を書け。
3. E を v , m , c で表せ。
4. $v = 0$ のときの E を E_0 とする。 E_0 を質点の**静止エネルギー**と呼ぶ。 E_0 を m , c で表せ。
5. $\dfrac{v}{c} \ll 1$ の場合に、 設問 3. の結論の式を $\dfrac{v}{c}$ の 2 次までで近似する式を求めよ。
6. 質点の相対論的な質量を $m_r = \dfrac{m}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$ とする。 E を m_r , c で表せ。
7. $\boldsymbol{p}$, p^μ , u^μ の定義から導かれる、 p を v , m , c で表す式を書け。
8. E を p , m , c で表せ。

問題 20 の答

1. u^μ の定義によれば
$$u^0 = \frac{dx^0}{d\tau}$$
である。

　問題 17 の 設問 6. の結論を使うと
$$\begin{aligned} u^0 &= \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\frac{dx^0}{dt} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\frac{d(c\,t)}{dt} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\cdot c \\ &= \frac{c}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \end{aligned}$$
となる。

2. p^μ の定義によれば
$$p^0 = m\,u^0$$
である。

　前問の結論を使うと
$$\begin{aligned} p^0 &= m\cdot\frac{c}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \\ &= \frac{m\,c}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \end{aligned}$$
となる。

3. E の定義によれば
$$E = c\,p^0$$
である。

　前問の結論を使うと
$$\begin{aligned} E &= c\cdot\frac{m\,c}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \\ &= \frac{m\,c^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \qquad (231) \end{aligned}$$
となる。

4. (231) 式に $v = 0$ 、 $E = E_0$ を代入して

$$E_0 = m\, c^2$$

である。

質点は、静止している状態において、静止質量に比例する静止エネルギーを持つ、と言える。

5. $\dfrac{v}{c} \ll 1$ の場合に、 設問 3. の結論の式（ (231) 式）を $\dfrac{v}{c}$ の 2 次 までで近似すると

$$\begin{aligned} E &\cong m\, c^2 \left(1 + \frac{v^2}{2\, c^2}\right) \\ &= m\, c^2 + \frac{1}{2}\, m\, v^2 \end{aligned}$$

となる。

第 1 項は、 静止エネルギー E_0 である。第 2 項は、非相対論的な運動エネルギーである。

6. $m_r = \dfrac{m}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$ とすると、(231) 式より

$$E = m_r\, c^2$$

と表せることがわかる。

7. $\boldsymbol{p}$, p^μ , u^μ の定義によれば

$$\begin{aligned}
p &= |\boldsymbol{p}| \\
&= \left| \begin{pmatrix} p^1 \\ p^2 \\ p^3 \end{pmatrix} \right| \\
&= \left| \begin{pmatrix} m\,u^1 \\ m\,u^2 \\ m\,u^3 \end{pmatrix} \right| \\
&= m \left| \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix} \right| \\
&= m \left| \begin{pmatrix} \dfrac{dx^1}{d\tau} \\ \dfrac{dx^2}{d\tau} \\ \dfrac{dx^3}{d\tau} \end{pmatrix} \right| \\
&= m \left| \frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \right| \\
&= m \left| \frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right|
\end{aligned}$$

である。

問題 17 の 設問 6. の結論を使うと

$$\begin{aligned}
p &= m \cdot \left| \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right| \\
&= \frac{m}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \left| \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right| \\
&= \frac{m}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} |\boldsymbol{v}| \\
&= \frac{m}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \cdot v \\
&= \frac{m\,v}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \qquad (232)
\end{aligned}$$

となる。

8. (231) 式と (232) 式から v を消去する。

(231) 式より

$$E^2 = \frac{m^2\,c^4}{1-\dfrac{v^2}{c^2}} \tag{233}$$

である。

(232) 式より

$$p^2 = \frac{m^2\,v^2}{1-\dfrac{v^2}{c^2}} \tag{234}$$

である。

(234) 式を v^2 について解くと

$$v^2 = \frac{c^2\,p^2}{m^2\,c^2+p^2} \tag{235}$$

が得られる。

(235) 式を (233) 式に代入して

$$\begin{aligned} E^2 &= \frac{m^2\,c^4}{1-\dfrac{1}{c^2}\cdot\dfrac{c^2\,p^2}{m^2\,c^2+p^2}} \\ &= m^2\,c^4+c^2\,p^2 \end{aligned}$$

を得る。

E が正であることに留意すると、これより

$$E = \sqrt{m^2\,c^4+c^2\,p^2}$$

が導かれる。

問題 21

質点がされる仕事率を積分することによって、質点のエネルギーを速さの関数として求めよう。

観測者の座標系を (t, x, y, z) とする。

静止質量 m の質点が 速度 $\boldsymbol{v}$ で運動している。 $v = |\boldsymbol{v}|$ とする。質点は、相対論的な 運動量 $\boldsymbol{p}$ を持っている。質点は、相対論的な 力 $\boldsymbol{F}$ を受けている。質点は、相対論的な エネルギー E を持っている。
時刻 $t = 0$ に質点の 速さ $v = 0$ であるとする。質点が $v = 0$ の状態で持つ相対論的なエネルギーを E_0 とする。

$\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{F}$, E の定義は

$$\boldsymbol{p} = \frac{m\,\boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$$

$$\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}$$

$$E = \int_0^t \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}\, dt + E_0$$

である。

E を v , m , c , E_0 で表す式を導け。

問題 21 の答

E の定義より

$$E = \int_0^t \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}\,dt + E_0$$

$\boldsymbol{F}$ の定義を代入して

$$= \int_0^t \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}\cdot\boldsymbol{v}\,dt + E_0$$

$\boldsymbol{p}$ の定義を代入して

$$= \int_0^t \left(\frac{d}{dt}\frac{m\,\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\right)\cdot\boldsymbol{v}\,dt + E_0$$

$$= m\int_0^t \left(\frac{d}{dt}\frac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\right)\cdot\boldsymbol{v}\,dt + E_0$$

$$= m\int_0^t \left(\frac{d}{dt}\frac{v^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} - \frac{\boldsymbol{v}\cdot\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\right)dt + E_0$$

$$= m\int_0^t \left(\frac{d}{dt}\frac{v^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} + c^2\frac{d}{dt}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)dt + E_0$$

$$= m\int_0^t \frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} + c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)dt + E_0$$

$$= m\int_0^t \frac{d}{dt}\frac{v^2+c^2\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\,dt + E_0$$

$$= m\int_0^t \frac{d}{dt}\frac{v^2+c^2-v^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\,dt + E_0$$

$$= m\int_0^t \frac{d}{dt}\frac{c^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\,dt + E_0$$

$$= m\,c^2\int_0^t \frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\,dt + E_0$$

$$
\begin{aligned}
&= m\,c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \right]_0^t + E_0 \\
&= m\,c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) + E_0
\end{aligned}
$$

である。

E_0 は未知の定数であるが、もしも

$$E_0 = m\,c^2$$

ならば、この結論は

$$E = \frac{m\,c^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$$

となる。

4 相対論的力学

真空中の光速を c とする。

4.1 運動方程式

質量 m の質点の運動を考える。

質点の固有時間を τ 、観測者から見た時刻を t 、質点の速度を $\boldsymbol{v}$ 、運動量を $\boldsymbol{p}$ 、4 元運動量を p^μ （ $\mu = 0, 1, 2, 3$ ）、質点にはたらく力を $\boldsymbol{F}$ 、4 元力を f^μ とする。

相対論的力学において、 $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{p}$ の間には、(203) 式

$$\boldsymbol{p} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{|\boldsymbol{v}|^2}{c^2}}} \boldsymbol{v}$$

の関係がある。

相対論的力学における質点の運動方程式は、以下のとおりである。

共変形式で表せば、(201) 式

$$f^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau}$$

である。

観測者の時間を用いる形式で、 $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{F}$ の関係として表せば、(204) 式

$$\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}$$

である。

観測者の時間を用いる形式で、 $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{F}$ の関係として表せば、(204) 式に (203) 式を代入した式

$$\boldsymbol{F} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m\,\boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - \frac{|\boldsymbol{v}|^2}{c^2}}}\right)$$

である。

4.2 エネルギー

質量 m の質点の運動を考える。
観測者から見た質点の速度を $\boldsymbol{v}$ 、運動量を $\boldsymbol{p}$ 、エネルギーを E とする。

相対論的力学において、 $\boldsymbol{v}$ と E の間には

$$E = \frac{m\,c^2}{\sqrt{1 - \frac{|\boldsymbol{v}|^2}{c^2}}}$$

の関係がある。

また、 $\boldsymbol{p}$ と E の間には

$$E^2 = m^2\,c^4 + c^2\,|\boldsymbol{p}|^2$$

の関係がある。

4.3 エネルギー運動量保存則

4 元運動量の総和

質点系において、 i 番目の質点の 4 元運動量を ${p_i}^\mu$ （ $\mu = 0, 1, 2, 3$ ）とする。
任意の時刻における ${p_i}^\mu$ の総和を P^μ とする。
ここで

- この総和が無限大に発散しない、すなわち、 P^μ がつねに有限の値をとる。
- どの質点も外力を受けず質点どうしの相互作用もない、すなわち、どの質点にも一切の力がはたらかない。

の 2 つの条件が成り立つ場合に、 P^μ は時刻によらない定数で[5]、また、反変ベクトルである[6][7]。

エネルギー運動量保存則

質点系において

- P^μ がつねに有限の値をとる。
- どの質点も外力を受けない。
- 短い限られた時間の間にだけ質点どうしの相互作用が存在する。

の 3 つの条件が成り立つ場合（衝突問題など）を考える。

このとき、相互作用が起こる前の時刻においては、 P^μ が時刻によらない定数で反変ベクトルである。それを $(P^\mu)_I$ とする。
そして、相互作用が終わった後の時刻においても、 P^μ が時刻によらない定数で反変ベクトルである。それを $(P^\mu)_F$ とする。

このような場合に、相対論的力学では、 $(P^\mu)_I = (P^\mu)_F$ を仮定する。これを**エネルギー運動量保存則**と呼ぶ。
この式は共変形式である。ゆえに、エネルギー運動量保存則は、Einstein の特殊相対性原理に従う。

4 元運動量は、その第 0 成分がエネルギー（の $\dfrac{1}{c}$ 倍 ）であり（(205) 式）、第 1〜3 成分が運動量である（(202) 式）。よって、エネルギー運動量保存則は、外力を受けない質点系において「エネルギーの総和が相互作用の前後で保存すること」「運動量の総和が相互作用の前後で保存すること」の 2 つを合わせた法則だと言うことができる。

---

[5]運動方程式より個々の質点の 4 元運動量 ${p_i}^\mu$ が時刻に依存しない定数となる。ゆえに、それらの 総和 P^μ も定数となる。

[6] 一般の場合には P^μ は反変ベクトルでない。たとえば、2 体系を考えると、 P^μ は、同一の時刻における 2 つの質点の 4 元運動量 ${p_1}^\mu$, ${p_2}^\mu$ を用いて $P^\mu = {p_1}^\mu + {p_2}^\mu$ と表せる。これらを座標系 S での量とし、これらに座標系 S′ への Lorentz 変換を施した量をそれぞれ P'^μ, ${p'_1}^\mu$, ${p'_2}^\mu$ とすれば、この式の両辺を Lorentz 変換して $P'^\mu = {p'_1}^\mu + {p'_2}^\mu$ が得られる。ところが、S 系で同時と観測される 2 つの事象は S′ 系では同時でないと観測されるので、 ${p'_1}^\mu$ と ${p'_2}^\mu$ は同一でない時刻における 2 つの質点の 4 元運動量である。よって、 P^μ と P'^μ とは同じ物理量ではない。Lorentz 変換によって同じ物理量にならない量は、反変ベクトルでない。

[7]${p_i}^\mu$ が時刻に依存しない定数ならば、 脚注 6 の議論で $({p_1}^\mu + {p_2}^\mu)$ と $({p'_1}^\mu + {p'_2}^\mu)$ を同じ物理量とみなせるのであり、 P^μ は反変ベクトルである。

4.4 作用反作用の法則

作用反作用の法則

Newton 力学において、**運動量保存則**は、**作用反作用の法則**と等価である。

相対論的力学においては、エネルギー運動量保存則を仮定することがあるが、そのとき、やはり、それと等価なものとして作用反作用の法則が成り立つのだろうか。

Newton 力学では、作用反作用の法則を、接触する質点の間にはたらく力についても、電磁気力のような離れた質点の間にはたらく力についても、必ず成り立つと仮定する。相対論的力学では、それと同じ仮定は、不合理であり、認めることができない。

たとえば、2 体系を考え、座標系 S から見て 時刻 t に質点 2 が質点 1 に 力 $\boldsymbol{F}$ をおよぼしているとする。これを別の座標系 S' から見ると、 時刻 t' に質点 2 が質点 1 に 力 $\boldsymbol{F}'$ をおよぼしているように見えるとする。ここで作用反作用の法則を仮定すると、 $\boldsymbol{F}$ あるいは $\boldsymbol{F}'$ の反作用を、質点 2 が、S 系では 時刻 t に、S' 系では 時刻 t' に受けることになる。このとき、質点 2 の位置が質点 1 の位置と異なるなら、質点 2 の位置では、S 系から見て 時刻 t になる瞬間と S' 系から見て 時刻 t' になる瞬間とは、一致しない。つまり、この仮定の下では、質点 2 は 1 つの力の反作用を 2 つの時刻に受けることになってしまうのである。これは、不合理である。

ということであるが、では、相対論的力学では作用反作用の法則は成り立たないと考えるべきなのだろうか。

ところが、そういうわけでもないのだ。「力」の概念を Newton 力学とはやや異なるものに修正し、その概念に基づいた合理的な仮定を作用反作用の法則とすれば、相対論的力学でもやはり作用反作用の法則が成り立つと考えることができる。

相対論的力学においては、力を考えるとき、次のような見方をする。自然界に遠隔作用は存在せず、すべての力は近接作用である。すなわち、質点が離れた質点に力をおよぼすことは、そもそも、ないのである。

電磁気力のような離れた質点の間にはたらくように見える力は、電磁場のような**場**を介した近接作用であり、質点から場へ、場から場へ、場から質点へと近接作用で力がはたらくことによって生じる。

この見方によるのが、相対論的力学における力の概念である。相対論的力学における作用反作用の法則は、この概念に基づいて、近接作用の力について成り立つ法則として仮定する。

そうすると、先に不合理の例として述べた状況は、次のように説明できる。

「質点 2 が質点 1 におよぼす 力 $\boldsymbol{F}$ 」と呼んだ力は、正しくは、質点 2 が質点 2 の位置の場に力をおよぼし、それによってその場が変化し、その変化によって隣り合う場も変化し、それを繰り返して、ついには質点 1 の位置の場も変化することにより、その変化した場が質点 1 におよぼす力である。必然的に、場の変化が伝播するのに時間がかかるので、質点 1 が（場から）力を受ける時刻は、どの座標系から見ても、質点 2 が（場に）力をおよぼす時刻より後になる。

「 $\boldsymbol{F}$ の反作用」と呼んだ力は、正しくは、質点 1 の位置から質点 2 の位置まで同様の原理で場の変化が伝播することにより、質点 2 が場から受ける力である。こちらも、やはり、質点 2 が（場から）力を受ける時刻は、どの座標系から見ても、質点 1 が（場に）力をおよぼす時刻より後になる。よって、「 $\boldsymbol{F}$ の反作用」と呼んだこの力は、質点 1 が $\boldsymbol{F}$ を受けるより前に場におよぼした力に起因するものであり、実は、 $\boldsymbol{F}$ の反作用ではない。 $\boldsymbol{F}$ とは無関係な力と言える。

$\boldsymbol{F}$ の真の反作用は、正しくは、質点 1 が $\boldsymbol{F}$ を受けた瞬間に質点 1 の位置の場が質点 1 から受ける力である。これは、作用反作用の法則により、 $\boldsymbol{F}$ と大きさが等しく反対向きである。

また、質点 2 が（場に）およぼした力の反作用も存在する。それは、質点 2 が力をおよぼした瞬間に、質点 2 の位置の場から質点 2 が受ける力である。この力は、質点 2 が場におよぼした力と大きさが等しく反対向きである。

場のエネルギーと運動量

この、「近接作用しか存在しない」という見方の下では、場がエネルギーと運動量を持つ、すなわち、場の 4 元運動量を定義できる、ということを仮定すれば、作用反作用の法則から、「相互作用するすべての質点と場を合わせた系全体の 4 元運動量の総和が保存する」ことを、等価な法則として導ける。

エネルギー運動量保存則は、この法則の特殊な場合における形として導かれるものである。

問題 22

相対論的力学を使って、1 次元空間での質点の運動を考える。

時刻を t とする。質点の質量を m 、速度を v とし、質点が受ける力を F とする。

真空中の光速を c とする。

1. Newton 力学における Newton の運動方程式は
$$m\frac{dv}{dt}=F$$
であったが、相対論的力学においてこれに代わる相対論的運動方程式を、 t, v, F, m, c を用いて書け。

F はつねに一定で正であるとする。 $t=0$ の瞬間に $v=0$ であるとする。

2. 運動方程式を解き、 v を t の関数として表す式を求めよ。
3. t がきわめて小さいとき、 v は t のどのような関数になるか。
4. じゅうぶん長い時間が経過すると、 v はどのような値に近づくか。
5. 縦軸に v をとり、横軸に t をとったグラフを描け。

質点の位置の座標を x とする。 $t=0$ の瞬間に $x=0$ であるとする。

6. x を t の関数として表す式を求めよ。
7. 縦軸に x をとり、横軸に t をとったグラフを描け。

問題 22 の答

1.
$$m\,\frac{d}{dt}\left(\frac{v}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\right)=F \tag{236}$$

である。

2. (236) 式より

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{v}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\right) &= \frac{F}{m}\\
\int_0^t \frac{d}{dt}\left(\frac{v}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\right)dt &= \int_0^t \frac{F}{m}\,dt\\
\left[\frac{v}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\right]_{t=0}^{t} &= \left[\frac{F}{m}\,t\right]_{t=0}^{t}\\
\frac{v}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} &= \frac{F}{m}\,t\\
\frac{v^2}{1-\dfrac{v^2}{c^2}} &= \frac{F^2}{m^2}\,t^2\\
v^2 &= \frac{F^2}{m^2}\,t^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\\
\left(1+\frac{F^2}{m^2\,c^2}\,t^2\right)v^2 &= \frac{F^2}{m^2}\,t^2\\
v^2 &= \frac{\dfrac{F^2}{m^2}\,t^2}{1+\dfrac{F^2}{m^2\,c^2}\,t^2}
\end{aligned}$$

F が正であることから v は正と考えられるので

$$v = \frac{\dfrac{F}{m}\,t}{\sqrt{1+\dfrac{F^2}{m^2\,c^2}\,t^2}} \tag{237}$$

である。

3. t が微小なとき、(237) 式の右辺を $\dfrac{F}{m\,c}\,t$ の 1 次までで近似すると

$$
\begin{aligned}
v &= c \cdot \frac{\dfrac{F}{m\,c}\,t}{\sqrt{1+\dfrac{F^2}{m^2\,c^2}\,t^2}} \\
&= c \cdot \frac{F}{m\,c}\,t \cdot \left(1+\frac{1}{2}\,\frac{F^2}{m^2\,c^2}\,t^2+\cdots\right) \\
&= c \cdot \left(\frac{F}{m\,c}\,t+\frac{1}{2}\,\frac{F^3}{m^3\,c^3}\,t^3+\cdots\right) \\
&\cong c \cdot \frac{F}{m\,c}\,t \\
&= \frac{F}{m}\,t
\end{aligned}
$$

となる。

これは、Newton 力学による結論に等しい。

4. $t \to \infty$ の極限において、(237) 式は

$$
\begin{aligned}
v &= c \cdot \frac{\dfrac{F}{m\,c}\,t}{\sqrt{1+\dfrac{F^2}{m^2\,c^2}\,t^2}} \\
&= c \cdot \frac{1}{\sqrt{\dfrac{m^2\,c^2}{F^2\,t^2}+1}} \\
&\longrightarrow c
\end{aligned}
$$

となる。

これは、質点を一定の力で加速し続けたとき、速さが無限に大きくなるのではなく、無限に長い時間かかって真空中の光速に限りなく近づいていく、ということである。言い方を変えると、質点をどれだけ加速しても、真空中の光速以上の速さにはならない、ということである。

5. (237) 式をグラフにすればよい。

設問 3. と 設問 4. の結論を合わせて考えると、縦軸に v をとり横軸に t をとったグラフは、図 5 のようであることがわかる。

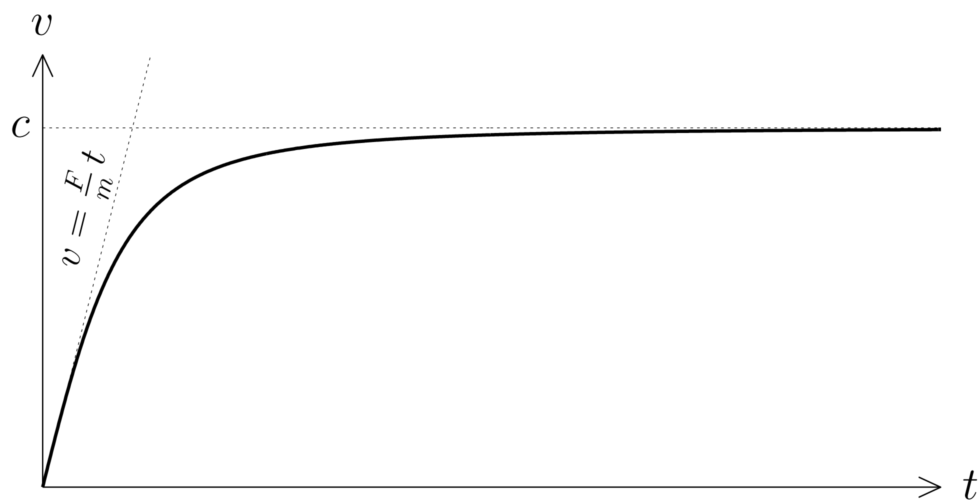

図 5

6. (237) 式より

$$
\begin{aligned}
\int_0^t v\,dt &= \int_0^t \frac{\dfrac{F}{m}\,t}{\sqrt{1+\dfrac{F^2}{m^2\,c^2}\,t^2}}\,dt \\
\Big[\,x\,\Big]_{t=0}^{t} &= \left[\frac{m\,c^2}{F}\sqrt{1+\frac{F^2}{m^2\,c^2}\,t^2}\right]_{t=0}^{t} \\
x &= \frac{m\,c^2}{F}\left(\sqrt{1+\frac{F^2}{m^2\,c^2}\,t^2}-1\right) \qquad (238)
\end{aligned}
$$

である。

7. (238) 式をグラフにすればよい。

t が微小なとき、(238) 式の右辺を $\dfrac{F}{m\,c}\,t$ の 2 次までで近似すると

$$x = \frac{F}{2\,m}\,t^2$$

となる。

$t \to \infty$ の極限において、(238) 式は

$$x \longrightarrow c\,t - \frac{m\,c^2}{F}$$

となる。

よって、縦軸に x をとり横軸に t をとったグラフは、 $t=0$ の近傍では放物線で、 t が大きくなるにしたがって、 傾き c の直線に漸近していくことがわかる。このことは、あるいは、 設問 3. と 設問 4. の結論から言うこともできる。

以上のことから、縦軸に x をとり横軸に t をとったグラフは、図 6 のようである。

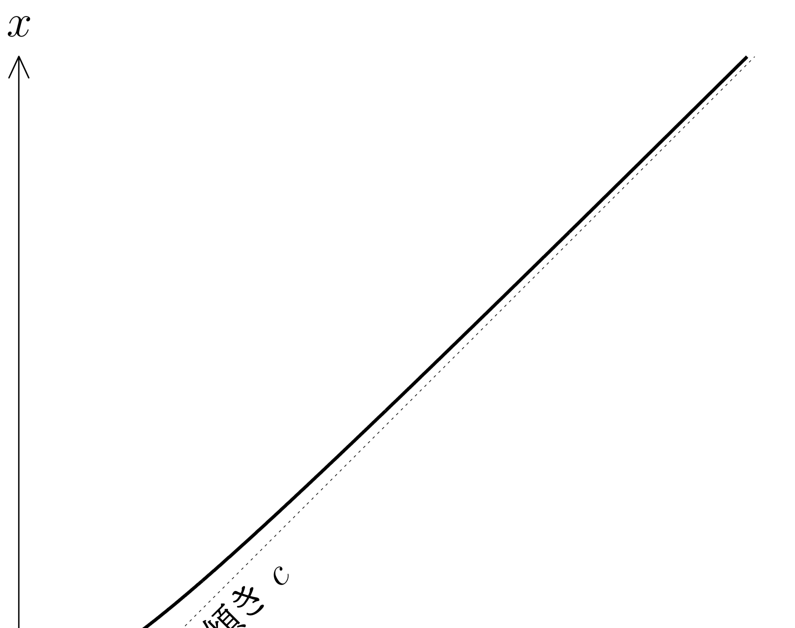

図　6

問題 23

質量 M の質点 0 が静止していて、ある瞬間に、 質量 m_1 の質点 1 と 質量 m_2 の質点 2 に分裂する。
質点 0 のエネルギーを E_0 、運動量を $\mathbf{0}$ 、質点 1 のエネルギーを E_1 、運動量を $\boldsymbol{p}_1$ 、質点 2 のエネルギーを E_2 、運動量を $\boldsymbol{p}_2$ とする。

この分裂の前と後の間で、質点 0、または、質点 1 と質点 2 より成る質点系についてエネルギー運動量保存則が成り立つとする。

真空中の光速を c とする。

1. E_0 , E_1 , $\boldsymbol{p}_1$, E_2 , $\boldsymbol{p}_2$ を用いて、エネルギー運動量保存則を表す式を書け。
2. E_0 を M , c で表せ。
3. E_1 を $\boldsymbol{p}_1$, m_1 , c で表せ。E_2 を $\boldsymbol{p}_2$, m_2 , c で表せ。
4. E_1 , $|\boldsymbol{p}_1|$, E_2 , $|\boldsymbol{p}_2|$ がすべて 0 より大きい実数の値を持つためには $M \geq m_1 + m_2$ でなければならないことを示せ。
5. E_1 および E_2 を M , m_1 , m_2 , c で表せ。
6. $|\boldsymbol{p}_1|$ および $|\boldsymbol{p}_2|$ を M , m_1 , m_2 , c で表せ。

問題 23 の答

1. 質点 0 の 4 元運動量を ${p_0}^\mu$ （ $\mu = 0, 1, 2, 3$ ）とすると

$$
\begin{aligned}
{p_0}^0 &= \frac{E_0}{c} \\
\begin{pmatrix} {p_0}^1 \\ {p_0}^2 \\ {p_0}^3 \end{pmatrix} &= \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

である。

質点 1 の 4 元運動量を ${p_1}^\mu$ 、質点 2 の 4 元運動量を ${p_2}^\mu$ とすると

$$
\begin{aligned}
{p_1}^0 &= \frac{E_1}{c} \\
\begin{pmatrix} {p_1}^1 \\ {p_1}^2 \\ {p_1}^3 \end{pmatrix} &= \boldsymbol{p}_1 \\
{p_2}^0 &= \frac{E_2}{c} \\
\begin{pmatrix} {p_2}^1 \\ {p_2}^2 \\ {p_2}^3 \end{pmatrix} &= \boldsymbol{p}_2
\end{aligned}
$$

である。

分裂前の質点系の 4 元運動量の総和を $(P^\mu)_I$ とすると

$$(P^\mu)_I = {p_0}^\mu$$

である。

分裂後の質点系の 4 元運動量の総和を $(P^\mu)_F$ とすると

$$(P^\mu)_F = {p_1}^\mu + {p_2}^\mu$$

である。

エネルギー運動量保存則より

$$(P^\mu)_I = (P^\mu)_F$$

が成り立つ。

以上をすべて合わせると

$$
\begin{aligned}
E_0 &= E_1 + E_2 && (239) \\
\mathbf{0} &= \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 && (240)
\end{aligned}
$$

が得られる。

2. 質点 0 の運動量が $\mathbf{0}$ であるから

$$E_0 = M\,c^2 \tag{241}$$

である。

3.

$$
\begin{aligned}
E_1 &= \sqrt{{m_1}^2\,c^4 + c^2\,|\boldsymbol{p}_1|^2} && (242) \\
E_2 &= \sqrt{{m_2}^2\,c^4 + c^2\,|\boldsymbol{p}_2|^2} && (243)
\end{aligned}
$$

である。

4. $m_1\,,\,m_2\,,\,c$ は正の実数であるから、 $|\boldsymbol{p}_1|\,,\,|\boldsymbol{p}_2|$ が実数であるならば

$$\begin{aligned}\sqrt{{m_1}^2\,c^4 + c^2\,\left|\boldsymbol{p}_1\right|^2} &\geq m_1\,c^2 \\ \sqrt{{m_2}^2\,c^4 + c^2\,\left|\boldsymbol{p}_2\right|^2} &\geq m_2\,c^2\end{aligned}$$

が成り立ち、これと (242) 式・(243) 式より $E_1\,,\,E_2$ は実数である。

これより、(239) 式に (241) (242) (243) 式を代入して

$$\begin{aligned}M\,c^2 &= \sqrt{{m_1}^2\,c^4 + c^2\,\left|\boldsymbol{p}_1\right|^2} + \sqrt{{m_2}^2\,c^4 + c^2\,\left|\boldsymbol{p}_2\right|^2} \\ &\geq m_1\,c^2 + m_2\,c^2\end{aligned}$$

を得る。すなわち

$$M \geq m_1 + m_2$$

である。

以上より、 $E_1\,,\,|\boldsymbol{p}_1|\,,\,E_2\,,\,|\boldsymbol{p}_2|$ がすべて実数の値を持つためには $M \geq m_1 + m_2$ でなければならない、と言える。

なお、等号が成り立つのは $|\boldsymbol{p}_1| = |\boldsymbol{p}_2| = 0$ の場合だけである。

5. (239) 式より

$$\begin{aligned}{E_0}^2 &= {E_1}^2 + {E_2}^2 + 2\,E_1\,E_2 \\ {E_0}^2 - \left({E_1}^2 + {E_2}^2\right) &= 2\,E_1\,E_2 \\ {E_0}^4 + \left({E_1}^2 + {E_2}^2\right)^2 - 2\,{E_0}^2\,\left({E_1}^2 + {E_2}^2\right) &= 4\,{E_1}^2\,{E_2}^2 \\ {E_0}^4 + {E_1}^4 + {E_2}^4 + 2\,{E_1}^2\,{E_2}^2 - 2\,{E_0}^2\,\left({E_1}^2 + {E_2}^2\right) &= 4\,{E_1}^2\,{E_2}^2 \\ {E_0}^4 + {E_1}^4 + {E_2}^4 - 2\,{E_1}^2\,{E_2}^2 - 2\,{E_0}^2\,\left({E_1}^2 + {E_2}^2\right) &= 0 \\ {E_0}^4 + \left({E_1}^2 - {E_2}^2\right)^2 - 2\,{E_0}^2\,\left({E_1}^2 + {E_2}^2\right) &= 0 \qquad (244)\end{aligned}$$

が得られる。

いっぽう、(242) 式と (243) 式より

$$\begin{aligned}{E_1}^2 &= {m_1}^2\,c^4 + c^2\,\left|\boldsymbol{p}_1\right|^2 \qquad (245) \\ {E_2}^2 &= {m_2}^2\,c^4 + c^2\,\left|\boldsymbol{p}_2\right|^2\end{aligned}$$

が導かれるが、これに、(240) 式より導かれる

$$\boldsymbol{p}_2 = -\boldsymbol{p}_1 \qquad (246)$$

を代入すると

$$\begin{aligned}{E_1}^2 &= {m_1}^2\,c^4 + c^2\,\left|\boldsymbol{p}_1\right|^2 \\ {E_2}^2 &= {m_2}^2\,c^4 + c^2\,\left|\boldsymbol{p}_1\right|^2\end{aligned}$$

となる。この 2 つの式から $|\boldsymbol{p}_1|$ を消去すると

$${E_2}^2 = {E_1}^2 - \left({m_1}^2 - {m_2}^2\right)\,c^4 \qquad (247)$$

が得られる。

E_0 は (241) 式により $M\,,\,c$ で表すことができるので、(244) 式と (247) 式を $E_1\,,\,E_2$ に関する連立方程式とみなして解けば、 $E_1\,,\,E_2$ を $M\,,\,m_1\,,\,m_2\,,\,c$ で表す式を得ることができる。

(244) 式に (247) 式を代入すると

$$
\begin{aligned}
{E_0}^4 + \left({m_1}^2 - {m_2}^2\right)^2 c^8 - 2\,{E_0}^2 \left(2\,{E_1}^2 - \left({m_1}^2 - {m_2}^2\right) c^4\right) &= 0 \\
-4\,{E_0}^2\,{E_1}^2 + {E_0}^4 + \left({m_1}^2 - {m_2}^2\right)^2 c^8 + 2\,{E_0}^2 \left({m_1}^2 - {m_2}^2\right) c^4 &= 0 \\
-4\,{E_0}^2\,{E_1}^2 + \left({E_0}^2 + \left({m_1}^2 - {m_2}^2\right) c^4\right)^2 &= 0 \\
4\,{E_0}^2\,{E_1}^2 &= \left({E_0}^2 + \left({m_1}^2 - {m_2}^2\right) c^4\right)^2 \\
{E_1}^2 &= \frac{1}{4}\left(E_0 + \frac{\left({m_1}^2 - {m_2}^2\right) c^4}{E_0}\right)^2
\end{aligned}
$$

となる。(241) 式をこれに代入して

$$
\begin{aligned}
{E_1}^2 &= \frac{1}{4}\left(M\,c^2 + \frac{\left({m_1}^2 - {m_2}^2\right) c^4}{M\,c^2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}\left(M\,c^2 + \frac{\left({m_1}^2 - {m_2}^2\right) c^2}{M}\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}\left(M + \frac{{m_1}^2 - {m_2}^2}{M}\right)^2 c^4 \qquad (248) \\
E_1 &= \frac{1}{2}\left(M + \frac{{m_1}^2 - {m_2}^2}{M}\right) c^2
\end{aligned}
$$

を得る。ただし、最後の変形において、 $m_1\,,\,m_2$ が 0 以上の実数であることと $M \geq m_1 + m_2$ であることから $\left(M + \frac{{m_1}^2 - {m_2}^2}{M}\right) \geq 0$ が導かれることを考慮に入れた。

(247) 式に (248) 式を代入すると

$$
\begin{aligned}
{E_2}^2 &= \frac{1}{4}\left(M + \frac{{m_1}^2 - {m_2}^2}{M}\right)^2 c^4 - \left({m_1}^2 - {m_2}^2\right) c^4 \\
&= \frac{1}{4}\left(M^2 + \frac{\left({m_1}^2 - {m_2}^2\right)^2}{M^2} + 2\left({m_1}^2 - {m_2}^2\right)\right) c^4 - \left({m_1}^2 - {m_2}^2\right) c^4 \\
&= \frac{1}{4}\left(M^2 + \frac{\left({m_1}^2 - {m_2}^2\right)^2}{M^2} + 2\left({m_1}^2 - {m_2}^2\right) - 4\left({m_1}^2 - {m_2}^2\right)\right) c^4 \\
&= \frac{1}{4}\left(M^2 + \frac{\left({m_1}^2 - {m_2}^2\right)^2}{M^2} - 2\left({m_1}^2 - {m_2}^2\right)\right) c^4 \\
&= \frac{1}{4}\left(M - \frac{{m_1}^2 - {m_2}^2}{M}\right)^2 c^4 \\
&= \frac{1}{4}\left(M + \frac{{m_2}^2 - {m_1}^2}{M}\right)^2 c^4 \\
E_2 &= \frac{1}{2}\left(M + \frac{{m_2}^2 - {m_1}^2}{M}\right) c^2
\end{aligned}
$$

を得る。ただし、最後の変形において、 $m_1\,,\,m_2$ が 0 以上の実数であることと $M \geq m_1 + m_2$ であることから $\left(M + \frac{{m_2}^2 - {m_1}^2}{M}\right) \geq 0$ が導かれることを考慮に入れた。

6. (245) 式より

$$|\boldsymbol{p}_1|^2 = \frac{{E_1}^2}{c^2} - {m_1}^2\, c^2$$

(248) 式を代入して

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}\left(M + \frac{{m_1}^2 - {m_2}^2}{M}\right)^2 c^2 - {m_1}^2\, c^2 \\
&= \frac{1}{4}\left(M^2 + \frac{\left({m_1}^2 - {m_2}^2\right)^2}{M^2} + 2\left({m_1}^2 - {m_2}^2\right)\right) c^2 - {m_1}^2\, c^2 \\
&= \frac{1}{4}\left(M^2 + \frac{\left({m_1}^2 - {m_2}^2\right)^2}{M^2} + 2\left({m_1}^2 - {m_2}^2\right) - 4\,{m_1}^2\right) c^2 \\
&= \frac{1}{4}\left(M^2 + \frac{\left({m_1}^2 - {m_2}^2\right)^2}{M^2} - 2\left({m_1}^2 + {m_2}^2\right)\right) c^2 \\
&= \frac{c^2}{4\,M^2}\left(M^4 + \left({m_1}^2 - {m_2}^2\right)^2 - 2\,M^2\left({m_1}^2 + {m_2}^2\right)\right) \\
&= \frac{c^2}{4\,M^2}\left(M^4 + (m_1 + m_2)^2 (m_1 - m_2)^2 - M^2\left((m_1 + m_2)^2 + (m_1 - m_2)^2\right)\right) \\
&= \frac{c^2}{4\,M^2}\left(M^2 - (m_1 + m_2)^2\right)\left(M^2 - (m_1 - m_2)^2\right) \\
&= \frac{c^2}{4\,M^2}\left(M + (m_1 + m_2)\right)\left(M - (m_1 + m_2)\right)\left(M + (m_1 - m_2)\right)\left(M - (m_1 - m_2)\right) \\
&= \frac{c^2}{4\,M^2}(M + m_1 + m_2)(M - m_1 - m_2)(M + m_1 - m_2)(M - m_1 + m_2)
\end{aligned}$$

$$|\boldsymbol{p}_1| = \frac{c}{2\,M}\sqrt{(M + m_1 + m_2)(M - m_1 - m_2)(M + m_1 - m_2)(M - m_1 + m_2)}$$

を得る。

(246) 式より

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{p}_2| &= |-\boldsymbol{p}_1| \\
&= |\boldsymbol{p}_1| \\
&= \frac{c}{2\,M}\sqrt{(M + m_1 + m_2)(M - m_1 - m_2)(M + m_1 - m_2)(M - m_1 + m_2)}
\end{aligned}$$

を得る。

問題 24

1 次元空間にある 2 質点系を考える。
質点 1 の質量を m_1 、質点 2 の質量を m_2 とする。

質点系の力学では、一般に、**実験室系**および**重心系**と呼ばれる 2 種類の座標系が用いられる。
実験室系とは、実験室に固定した座標系のことである。
重心系とは、その座標系から観測すると系の運動量の総和が $\mathbf{0}$ となるような座標系のことである。

実験室系から見た重心系の速度を V とする。
実験室系から見た、質点 1 のエネルギーを E_1 、運動量を p_1 とする。
実験室系から見た、質点 2 のエネルギーを E_2 、運動量を p_2 とする。
重心系から見た、質点 1 のエネルギーを E_1^C 、運動量を p_1^C とする。
重心系から見た、質点 2 のエネルギーを E_2^C 、運動量を p_2^C とする。

真空中の光速を c とする。

1. 実験室系から見た質点 1 の速度を E_1 , p_1 , c で表せ。実験室系から見た質点 2 の速度を E_2 , p_2 , c で表せ。

2. V を E_1 , p_1 , E_2 , p_2 , c で表せ。

次の関係式を満たすような 量 M を考える。

$$(E_1 + E_2)^2 = M^2 c^4 + c^2 (p_1 + p_2)^2$$

3. M が Lorentz 不変量であることを示せ。

4. M を E_1^C , E_2^C , c で表せ。

5. $(E_1 + E_2)$ を V , M , c で表せ。

6. $(p_1 + p_2)$ を V , M , c で表せ。

7. M と $(m_1 + m_2)$ の大小関係はどうか。

8. M の物理的意味を述べよ。

問題 24 の答

1. 実験室系から見た質点 1 の速度を v_1 とする。実験室系から見た質点 2 の速度を v_2 とする。

   p_1 と E_1 の定義より

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{m_1\,v_1}{\sqrt{1-\dfrac{{v_1}^2}{c^2}}} \\ E_1 &= \frac{m_1\,c^2}{\sqrt{1-\dfrac{{v_1}^2}{c^2}}} \end{aligned}$$

   である。

   この 2 つの式より m_1 を消去すると

$$v_1 = \frac{c^2\,p_1}{E_1}$$

   が導かれる。

   同様の考察により

$$v_2 = \frac{c^2\,p_2}{E_2}$$

   が導かれる。

2. 重心系の定義

$$p_1^C + p_2^C = 0 \tag{249}$$

   により V が定まる。

   V を E_1 , p_1 , E_2 , p_2 , c で表す式は、(249) 式に、 p_1^C , p_2^C を E_1 , p_1 , E_2 , p_2 , V , c で表す関係式を代入すれば導ける。 p_1^C , p_2^C を E_1 , p_1 , E_2 , p_2 , V , c で表す関係式は、4 元運動量の Lorentz 変換

$$p_1^C = \frac{p_1 - \dfrac{V}{c}\,\dfrac{E_1}{c}}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} \tag{250}$$

$$p_2^C = \frac{p_2 - \dfrac{V}{c}\,\dfrac{E_2}{c}}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} \tag{251}$$

   である。

   (249) 式に (250) 式と (251) 式を代入すると

$$\begin{aligned} \frac{p_1 - \dfrac{V}{c}\,\dfrac{E_1}{c}}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} + \frac{p_2 - \dfrac{V}{c}\,\dfrac{E_2}{c}}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} &= 0 \\ p_1 - V\,\frac{E_1}{c^2} + p_2 - V\,\frac{E_2}{c^2} &= 0 \\ \frac{V}{c^2}\,(\,E_1 + E_2\,) &= p_1 + p_2 \\ V &= \frac{c^2\,(\,p_1 + p_2\,)}{E_1 + E_2} \end{aligned} \tag{252}$$

   を得る。

3. M の定義より

$$M = \frac{1}{c^2}\sqrt{(\,E_1 + E_2\,)^2 - c^2\,(\,p_1 + p_2\,)^2} \tag{253}$$

である。

実験室系に対して 速度 U で運動する慣性系 S′ を考える。

S′ 系において実験室系における M と同様に定義される 量 M' を考える。すなわち、S′ 系から見た質点 1 のエネルギーを ${E_1}'$ 、運動量を ${p_1}'$ 、質点 2 のエネルギーを ${E_2}'$ 、運動量を ${p_2}'$ として

$$M' = \frac{1}{c^2}\sqrt{(\,{E_1}' + {E_2}'\,)^2 - c^2\,(\,{p_1}' + {p_2}'\,)^2} \tag{254}$$

である。

4 元運動量の Lorentz 変換より得られる関係式

$$\begin{aligned} E'_1 &= \frac{E_1 - U\,p_1}{\sqrt{1 - \dfrac{U^2}{c^2}}} \\ p'_1 &= \frac{p_1 - \dfrac{U\,E_1}{c^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{U^2}{c^2}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E'_2 &= \frac{E_2 - U\,p_2}{\sqrt{1 - \dfrac{U^2}{c^2}}} \\ p'_2 &= \frac{p_2 - \dfrac{U\,E_2}{c^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{U^2}{c^2}}} \end{aligned}$$

を (254) 式に代入すると

$$\begin{aligned} M' &= \frac{1}{c^2}\sqrt{\left(\frac{E_1 - U\,p_1}{\sqrt{1 - \dfrac{U^2}{c^2}}} + \frac{E_2 - U\,p_2}{\sqrt{1 - \dfrac{U^2}{c^2}}}\right)^2 - c^2\left(\frac{p_1 - \dfrac{U\,E_1}{c^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{U^2}{c^2}}} + \frac{p_2 - \dfrac{U\,E_2}{c^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{U^2}{c^2}}}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{\Big(E_1 - U\,p_1 + E_2 - U\,p_2\Big)^2 - c^2\left(p_1 - \dfrac{U\,E_1}{c^2} + p_2 - \dfrac{U\,E_2}{c^2}\right)^2}}{c^2\sqrt{1 - \dfrac{U^2}{c^2}}} \end{aligned}$$

ここで

$$
\begin{aligned}
\text{分子の根号の中} &= \left(E_1 - U\,p_1 + E_2 - U\,p_2\right)^2 - c^2\left(p_1 - \frac{U\,E_1}{c^2} + p_2 - \frac{U\,E_2}{c^2}\right)^2 \\
&= {E_1}^2 + U^2\,{p_1}^2 + {E_2}^2 + U^2\,{p_2}^2 \\
&\quad -2\,U\,E_1\,p_1 + 2\,E_1\,E_2 - 2\,U\,E_1\,p_2 - 2\,U\,E_2\,p_1 + 2\,U^2\,p_1\,p_2 - 2\,U\,E_2\,p_2 \\
&\quad -c^2\,{p_1}^2 - \frac{U^2\,{E_1}^2}{c^2} - c^2\,{p_2}^2 - \frac{U^2\,{E_2}^2}{c^2} \\
&\quad +2\,U\,E_1\,p_1 - 2\,c^2\,p_1\,p_2 + 2\,U\,E_2\,p_1 + 2\,U\,E_1\,p_2 - \frac{U^2\,E_1\,E_2}{c^2} + 2\,U\,E_2\,p_2 \\
&= {E_1}^2 + U^2\,{p_1}^2 + {E_2}^2 + U^2\,{p_2}^2 \\
&\quad +2\,E_1\,E_2 + 2\,U^2\,p_1\,p_2 \\
&\quad -c^2\,{p_1}^2 - \frac{U^2\,{E_1}^2}{c^2} - c^2\,{p_2}^2 - \frac{U^2\,{E_2}^2}{c^2} \\
&\quad -2\,c^2\,p_1\,p_2 - \frac{U^2\,E_1\,E_2}{c^2} \\
&= {E_1}^2 + {E_2}^2 + 2\,E_1\,E_2 - \frac{U^2\,{E_1}^2}{c^2} - \frac{U^2\,{E_2}^2}{c^2} - \frac{U^2\,E_1\,E_2}{c^2} \\
&\quad -c^2\,{p_1}^2 - c^2\,{p_2}^2 - 2\,c^2\,p_1\,p_2 + U^2\,{p_1}^2 + U^2\,{p_2}^2 + 2\,U^2\,p_1\,p_2 \\
&= \left(E_1 + E_2\right)^2 - \frac{U^2}{c^2}\left(E_1 + E_2\right)^2 - c^2\left(p_1 + p_2\right)^2 + U^2\left(p_1 + p_2\right)^2 \\
&= \left(1 - \frac{U^2}{c^2}\right)\left(E_1 + E_2\right)^2 - c^2\left(1 - \frac{U^2}{c^2}\right)\left(p_1 + p_2\right)^2 \\
&= \left(1 - \frac{U^2}{c^2}\right)\left(\left(E_1 + E_2\right)^2 - c^2\left(p_1 + p_2\right)^2\right)
\end{aligned}
$$

であるから

$$
\begin{aligned}
M' &= \frac{\sqrt{\left(1 - \frac{U^2}{c^2}\right)\left(\left(E_1 + E_2\right)^2 - c^2\left(p_1 + p_2\right)^2\right)}}{c^2\sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}} \\
&= \frac{\sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}\,\sqrt{(\,E_1 + E_2\,)^2 - c^2\,(\,p_1 + p_2\,)^2}}{c^2\sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}} \\
&= \frac{1}{c^2}\sqrt{(\,E_1 + E_2\,)^2 - c^2\,(\,p_1 + p_2\,)^2}
\end{aligned}
$$

となる。

(253) 式より、これは M に等しい。すなわち

$$M' = M$$

である。

よって、任意の慣性系において M と同様に定義した量はすべて等しいと言える。つまり、 M は Lorentz 不変である。

4. M は Lorentz 不変量であるから、重心系から見た M の定義より

$$M = \frac{1}{c^2}\sqrt{\left(\,E_1^C + E_2^C\,\right)^2 - c^2\,\left(\,p_1^C + p_2^C\,\right)^2}$$

が成り立つ。

重心系の定義より

$$p_1^C + p_2^C = 0$$

である。

以上より

$$M = \frac{E_1^C + E_2^C}{c^2} \tag{255}$$

が導かれる。

5. M を定義する式

$$(\,E_1 + E_2\,)^2 = M^2\,c^4 + c^2\,(\,p_1 + p_2\,)^2 \tag{256}$$

と 設問 2. の結論（(252) 式）とから導く。

(252) 式より

$$(\,p_1 + p_2\,)^2 = \frac{V^2}{c^4}\,(\,E_1 + E_2\,)^2$$

が得られる。

これを (256) 式に代入すると

$$\begin{aligned}
(\,E_1 + E_2\,)^2 &= M^2\,c^4 + \frac{V^2}{c^2}\,(\,E_1 + E_2\,)^2 \\
\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)(\,E_1 + E_2\,)^2 &= M^2\,c^4 \\
(\,E_1 + E_2\,)^2 &= \frac{M^2\,c^4}{1 - \dfrac{V^2}{c^2}} \\
E_1 + E_2 &= \frac{M\,c^2}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}
\end{aligned}$$

が導かれる。

6. (252) 式より

$$p_1 + p_2 = \frac{V}{c^2}\,(\,E_1 + E_2\,)$$

が得られる。

この式に前問の結論を代入すると

$$\begin{aligned}
p_1 + p_2 &= \frac{V}{c^2}\,\frac{M\,c^2}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}} \\
&= \frac{M\,V}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}
\end{aligned}$$

が導かれる。

7. (255) 式に

$$E_1^C = \sqrt{{m_1}^2\,c^4 + c^2\,{p_1^C}^2}$$
$$E_2^C = \sqrt{{m_2}^2\,c^4 + c^2\,{p_2^C}^2}$$

を代入すると

$$M = \frac{\sqrt{{m_1}^2\,c^4 + c^2\,{p_1^C}^2} + \sqrt{{m_2}^2\,c^4 + c^2\,{p_2^C}^2}}{c^2}$$
$$= \sqrt{{m_1}^2 + \frac{{p_1^C}^2}{c^2}} + \sqrt{{m_2}^2 + \frac{{p_2^C}^2}{c^2}}$$

である。

ここで

$$\sqrt{{m_1}^2 + \frac{{p_1^C}^2}{c^2}} \geq m_1$$
$$\sqrt{{m_2}^2 + \frac{{p_2^C}^2}{c^2}} \geq m_2$$

が成り立つことを考慮に入れると

$$M \geq m_1 + m_2$$

であることがわかる。

等号が成り立つのは、 $p_1^C = p_2^C = 0$ の場合、つまり、重心系から見て 2 つの質点が静止している場合、さらに言い換えると（座標系にかかわらず）2 つの質点が相対運動をしていない場合である[8]。

8. 2 質点系の力学において、 V を 2 質点系の速度、 $(E_1 + E_2)$ を 2 質点系のエネルギー、 $(p_1 + p_1)$ を 2 質点系の運動量とみなし、 M を 2 質点系の質量とみなすと、これらの間に、質点の速度・エネルギー・運動量・質量の間に成り立つのと同じ関係が成り立つ。

したがって、この解釈を用いれば、2 質点系を 1 つの物体とみなして全体の並進運動を考察できるのではないかと考えられる。 M は、その場合の、物体の質量に相当する量である。

前問で確かめたように、2 つの質点が相対運動をしていれば、 M は、2 つの質点の 質量 m_1 と m_2 の和よりも大きい。これは、質量が「物体が並進運動していない状態で持つエネルギー（の $\dfrac{1}{c^2}$ 倍 ）」という意味を持つ量であることを表している。2 質点系を 1 つの物体とみなすときには、2 つの質点の相対運動（重心系に対する運動）は物体の並進運動に影響を与えない内部の運動であり、そのために増大する物体のエネルギーは内部エネルギーとみなせるわけだが、その内部エネルギーを $(m_1\,c^2 + m_2\,c^2)$ に加えた量が $M\,c^2$ になっているのである。

[8] $p_1^C = 0$ の場合、(250) 式より $\dfrac{p_1}{E_1} = \dfrac{V}{c^2}$ が成り立ち、 設問 1. の結論より $\dfrac{p_1}{E_1} = \dfrac{v_1}{c^2}$ であることから、 $v_1 = V$ である。 $p_2^C = 0$ の場合、同様に、(251) 式と 設問 1. の結論より $v_2 = V$ である。したがって、 $p_1^C = p_2^C = 0$ の場合、 v_1 と v_2 は等しい（そしてそれが重心系の速度である）ことになり、実験室系から見て 2 つの質点は相対運動をしていない。