

高校生が演習で学ぶ  
解析力学

服部修平

2023年7月15日

# 1 Lagrange 形式

## 1.1 変分法

2次元空間の座標  $x, y$  の関数  $f(x, y)$  があるとする。

このとき、 $y$  が  $x$  の関数  $y(x)$  で表されるような2次元空間上の経路に沿って  $x_1 \leq x \leq x_2$  の範囲で  $f(x, y)$  を積分した

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y) dx$$

を考えると、 $I$  は、定義域  $[x_1, x_2]$  全体での  $y(x)$  の関数形に対応して値が定まる写像とみなせる。

この  $I$  のような、関数からスカラーへの写像を汎関数と呼び、 $I[y(x)]$  のように表す。

汎関数  $I[y(x)]$  を極大または極小にする  $x$ - $y$  平面上の経路、すなわち関数  $y(x)$  を求める問題を考える。この問題を解決するための基礎的な考え方が、変分法である。

### 変分法の考え方

変分法の考え方は、以下の通りである。

関数  $y(x)$  に微小な変化  $\delta y(x)$  を与えた場合の汎関数  $I[y(x)]$  の変化  $\delta I = I[y(x) + \delta y(x)] - I[y(x)]$  を考える。 $\delta y(x)$ ,  $\delta I$  を、それぞれ  $y(x)$ ,  $I$  の変分と呼ぶ。 $y(x)$  の変分は、経路の始点と終点では0、すなわち  $\delta y(x_1) = \delta y(x_2) = 0$  とする。

このとき、変分を与える前の  $y(x)$  が  $I$  を極大または極小にする関数であれば、どのような形の  $\delta y(x)$  を与えても  $\delta I$  が0になる。つまり、 $\delta y(x)$  の形によらず  $\delta I = 0$  となるための  $y(x)$  の条件を見つけられればよい。

### 多変数汎関数への拡張

変分法は、 $(N+1)$ 次元空間の座標  $x, y_1, y_2, \dots, y_N$  の関数  $f(x, y_1, y_2, \dots, y_N)$  に対する議論にまで拡張することができる。

その場合には、 $I$  を求める積分の経路は  $N$  個の関数  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_N(x)$  で表され、 $I$  はこれらの  $N$  個の関数の汎関数  $I[y_1(x), y_2(x), \dots, y_N(x)]$  になる。

$$\text{関数の組 } \mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \dots \\ y_N(x) \end{pmatrix} \text{ に変分の組 } \delta \mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} \delta y_1(x) \\ \delta y_2(x) \\ \dots \\ \delta y_N(x) \end{pmatrix} \text{ を与えた場合の } I[\mathbf{y}(x)] = I[y_1(x), y_2(x), \dots, y_N(x)]$$

の変分  $\delta I$  を考える。 $\delta \mathbf{y}(x)$  は、経路の始点と終点では  $\mathbf{0}$ 、すなわち  $\delta \mathbf{y}(x_1) = \delta \mathbf{y}(x_2) = \mathbf{0}$  とする。

このとき、変分を与える前の  $\mathbf{y}(x)$  が  $I$  を極大または極小にする関数の組であれば、どのような形の  $\delta \mathbf{y}(x)$  を与えても  $\delta I$  が0になる。つまり、 $\delta \mathbf{y}(x)$  の形によらず  $\delta I = 0$  となるための  $\mathbf{y}(x)$  の条件を見つけられればよい。

## 1.2 Euler-Lagrange の方程式

閉区間  $[x_1, x_2]$  で定義された  $x$  の関数  $y(x)$  があるとして、 $y(x)$  の導関数  $\frac{dy}{dx}$  を  $y'(x)$  と書くことにする。  
 $y, y', x$  の関数  $f(y, y', x)$  を考え、2つの  $x$  の値  $x_1, x_2$  の間で  $f(y, y', x)$  を積分した汎関数

$$I[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} f(y, y', x) dx$$

について、変分法で  $y(x)$  の変分  $\delta y(x)$  の形によらず  $I$  の変分  $\delta I$  が 0 になるための条件は、偏微分方程式

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

が満たされることである。

(1) 式を、**Euler-Lagrange の方程式**と呼ぶ。

### 多変数汎関数への拡張

Euler-Lagrange の方程式は、 $N$  個の関数  $y_i(x)$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) がある場合に、次のように拡張される。

$y_i(x)$  の導関数  $\frac{dy_i}{dx}$  を  $y'_i(x)$  と書くことにし、 $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}$ 、 $\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_N \end{pmatrix}$  とする。 $\mathbf{y}, \mathbf{y}', x$  の関数  $f(\mathbf{y}, \mathbf{y}', x)$

を考え、2つの  $x$  の値  $x_1, x_2$  の間で  $f(\mathbf{y}, \mathbf{y}', x)$  を積分した汎関数

$$I[\mathbf{y}(x)] = \int_{x_1}^{x_2} f(\mathbf{y}, \mathbf{y}', x) dx$$

について、変分法で  $y_i(x)$  の変分の組  $\delta \mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} \delta y_1(x) \\ \delta y_2(x) \\ \dots \\ \delta y_N(x) \end{pmatrix}$  の形によらず  $I$  の変分  $\delta I$  が 0 になるための条件は、

$N$  個の偏微分方程式

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i} = 0 \quad (2)$$

がすべて満たされることである。

## 問題 1

閉区間  $[x_1, x_2]$  で定義された  $x$  の関数  $y(x)$  があるとして、 $y(x)$  の導関数  $\frac{dy}{dx}$  を  $y'(x)$  と書くことにする。  
 $y, y', x$  の関数  $f(y, y', x)$  を考え、2つの  $x$  の値  $x_1, x_2$  の間で  $f(y, y', x)$  を積分した汎関数

$$I[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} f(y, y', x) dx$$

について、変分法で  $y(x)$  の変分  $\delta y(x)$  の形によらず  $I$  の変分  $\delta I$  が 0 になるならば、偏微分方程式

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

が成り立つことを導こう。

$\delta y(x)$  は、 $\delta y(x_1) = \delta y(x_2) = 0$  を満たすとする。

1.  $y(x)$  に変分  $\delta y(x)$  を与えると、 $y'(x)$  の変分  $\delta y'(x)$  が生じる。 $\delta y'(x)$  を  $\frac{d(\delta y)}{dx}$  で表せ。
2.  $y(x)$  に変分  $\delta y(x)$  を与えると、 $f$  の変分  $\delta f(x) = f(y + \delta y, y' + \delta y', x) - f(y, y', x)$  が生じる。 $\delta f(x)$  を  $\delta y(x), \delta y'(x), \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}$  で表せ。
3.  $\delta I$  を  $\delta f(x), x_1, x_2$  で表せ。
4.  $\delta I$  を  $\delta y(x), \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'}, x_1, x_2$  で表せ。
5.  $\delta y(x)$  の形によらず  $\delta I$  が 0 になるならば  $\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$  が成り立つことを導け。



## 問題 1 の答

1.  $y'(x)$  は、 $y(x)$  に対応して定まる導関数である。 $y(x)$  に変分  $\delta y(x)$  を与えて  $y(x) + \delta y(x)$  にすると、対応する導関数は  $\frac{d}{dx}(y(x) + \delta y(x))$  になる。

したがって、導関数  $y'(x)$  の変分  $\delta y'(x)$  は

$$\begin{aligned}\delta y'(x) &= \frac{d}{dx}(y(x) + \delta y(x)) - y'(x) \\ &= \left( \frac{dy}{dx} + \frac{d(\delta y)}{dx} \right) - y'(x) \\ &= \left( y'(x) + \frac{d(\delta y)}{dx} \right) - y'(x) \\ &= \frac{d(\delta y)}{dx}\end{aligned}\tag{3}$$

である。

2. 変分法では、 $\delta y(x)$ ,  $\delta y'(x)$  は微小であると考える。

したがって、 $f(y + \delta y, y' + \delta y', x) = f(y, y', x) + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y(x) + \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y'(x)$  と表せるから

$$\begin{aligned}\delta f(x) &= f(y + \delta y, y' + \delta y', x) - f(y, y', x) \\ &= \left( f(y, y', x) + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y(x) + \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y'(x) \right) - f(y, y', x) \\ &= \frac{\partial f}{\partial y} \delta y(x) + \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y'(x)\end{aligned}\tag{4}$$

である。

3.  $\delta I = I[y(x) + \delta y(x)] - I[y(x)]$  であるから

$$\begin{aligned}\delta I &= I[y(x) + \delta y(x)] - I[y(x)] \\ &= \int_{x_1}^{x_2} f(y + \delta y, y' + \delta y', x) dx - \int_{x_1}^{x_2} f(y, y', x) dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left( f(y + \delta y, y' + \delta y', x) - f(y, y', x) \right) dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \delta f(x) dx\end{aligned}\tag{5}$$

である。

4. (5) 式より

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \delta f(x) dx$$

(4) 式を代入して

$$\begin{aligned} &= \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \delta y(x) + \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y'(x) \right) dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y} \delta y(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y'(x) dx \end{aligned}$$

(3) 式を代入して

$$\begin{aligned} &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y} \delta y(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d(\delta y)}{dx} dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y} \delta y(x) dx + \left( \left[ \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y \right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \delta y(x) dx \right) \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y} \delta y(x) dx + \left( \left( \frac{\partial f}{\partial y'}(y_2, y_2', x_2) \delta y(x_2) - \frac{\partial f}{\partial y'}(y_1, y_1', x_1) \delta y(x_1) \right) - \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \delta y(x) dx \right) \end{aligned}$$

ただし、 $y_2 = y(x_2)$ 、 $y_2' = y'(x_2)$ 、 $y_1 = y(x_1)$ 、 $y_1' = y'(x_1)$  とする。ここで、 $\delta y(x_1) = \delta y(x_2) = 0$  であることを使って

$$\begin{aligned} &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y} \delta y(x) dx + \left( \left( \frac{\partial f}{\partial y'}(y_2, y_2', x_2) \cdot 0 - \frac{\partial f}{\partial y'}(y_1, y_1', x_1) \cdot 0 \right) - \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \delta y(x) dx \right) \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y} \delta y(x) dx - \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \delta y(x) dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \delta y(x) - \left( \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \delta y(x) \right) dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \delta y(x) dx \end{aligned} \tag{6}$$

を得る。

5. (6) 式より、 $\delta I$  が 0 になるということは、積分  $\int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \delta y(x) dx$  が 0 であるということである。

任意の  $\delta y(x)$  に対して  $\int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \delta y(x) dx = 0$  であるためには、 $\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'}$  が  $x$  によらず 0 でなければならない。

以上より、 $\delta y(x)$  の形によらず  $\delta I$  が 0 になるならば

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

が成り立つ。

これで、導いた。

### 1.3 ラグランジアン

系の運動エネルギーを  $T$ 、ポテンシャルエネルギーを  $V$  とする。

$T$  と  $V$  の差

$$L = T - V$$

をラグランジアンと呼ぶ。 $L$  は、一般に、系の状態を表す座標  $\mathbf{r}$ 、速度  $\dot{\mathbf{r}}$ 、時刻  $t$  の関数  $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$  として表すことができる。

#### 一般化座標

系の状態を表す座標  $\mathbf{r}$  の成分のうち独立なもの個数を、系の自由度と呼ぶ。3次元空間における1個の質点の自由度は3、2個の質点の自由度は6、 $N$ 個の質点の自由度は $3N$ であり、3次元空間で2個の質点が互いの間の距離を一定に保つように束縛されている系の自由度は5である。自由度は、系の状態を表すのに必要な変数の個数である。

系の状態を表す座標として、Descartes 座標以外の座標を用いることがある。Descartes 座標以外の座標の代表的な例には、円筒座標や極座標がある。Descartes 座標以外の座標を用いても、自由度  $N$  の系の状態を表すのに必要な変数の個数は、やはり  $N$  である。

座標の概念を完全に一般化したものを一般化座標と呼ぶ。円筒座標や極座標は、系の状態を表す変数として長さの次元ではない角を用いる点において Descartes 座標よりも広い概念といえる。これをさらに広げて、幾何学的でない量や物理的意味が簡単にはわからないような量まで含めた範囲で系の状態を表す変数の組を考えることができる。それが一般化座標である。一般化座標を用いても、自由度  $N$  の系の状態を表すのに必要な変数の個数は、やはり  $N$  である。

自由度  $N$  の系の状態を表す一般化座標の  $N$  個の変数を  $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_N \end{pmatrix}$  としたとき、その微分  $\dot{\mathbf{q}}$  を一般化速度と呼ぶ。

ラグランジアン  $L$  は、ふつう、一般化座標  $\mathbf{q}$ 、一般化速度  $\dot{\mathbf{q}}$ 、時刻  $t$  の関数  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  として表す。

#### 作用

2つの時刻  $t_1, t_2$  の間でのラグランジアン  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  の積分

$$S[\mathbf{q}(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) dt$$

を作用と呼ぶ。 $S[\mathbf{q}(t)]$  は、 $\mathbf{q}(t)$  の汎関数になっている。



## 1.4 Lagrange の運動方程式

古典力学は、変分法を用いて記述することができる。

古典力学において、時刻  $t_1$  における系の状態を始状態、 $t_2$  における系の状態を終状態とすると

時刻  $t_1$  と  $t_2$  の間では、  
始状態から始まって終状態に至る系の可能な運動のうち、  
作用  $S$  を最小とするものが実現する。

という法則が成り立つ。これを**最小作用の原理**と呼ぶ。

最小作用の原理から出発して力学的問題を考察するのが解析力学である。

最小作用の原理から、変分法によって、系のラグランジアン  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  が Euler-Lagrange の方程式を満たすことが導かれる。すなわち、(2) 式の  $x$  を  $t$  に、 $y_i$  を  $q_i$  に、 $f$  を  $L$  に置き換えた方程式

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (7)$$

( $i = 1, 2, \dots, N$ ) がすべて成り立つ。これを**Lagrange の運動方程式**と呼ぶ。

Lagrange の運動方程式が成り立つことは、最小作用の原理が成り立つことと同値であり、最小作用の原理が成り立つことは、Newton の運動方程式が成り立つことと同値である。つまり、Lagrange の運動方程式は、Newton の運動方程式と同等の意味を持つ。

## 問題 2

$x$ - $z$  面が水平、 $y$  軸が鉛直上向きであるような、Descartes 座標系  $(x, y, z)$  をとる。

$x$ - $y$  面内にレールが固定されている。レールの形状は、無次元の媒介変数  $\theta$  ( $-\pi \leq \theta \leq \pi$ ) と長さの次元の定数  $r$  ( $r > 0$ ) を用いた方程式

$$x = r(\theta + \sin \theta) \quad (8)$$

$$y = -r \cos \theta \quad (9)$$

で表される曲線である。

そのレールに、質量  $m$  の小球が、レールに沿って滑らかに動くことができるように取り付けられている。

小球を手でレールに沿った任意の位置に移動させ、静かに放す。その後の小球の運動を考える。

重力加速度の大きさを  $g$  とする。

時刻を  $t$  とする。以下では、 $x, y, \theta$  は小球の位置の  $x$  座標と  $y$  座標および  $\theta$  とする。

1.  $\dot{x}, \dot{y}$  を  $\theta, \dot{\theta}, r$  で表せ。
2. 小球の運動エネルギー  $T$  を  $m, \dot{x}, \dot{y}$  で表せ。
3. 小球の運動エネルギー  $T$  を  $m, \theta, \dot{\theta}, r$  で表せ。
4. 小球のポテンシャルエネルギー  $V$  を  $m, g, \theta, r$  で表せ。
5. 系のラグランジアンを  $L$  とする。 $\theta, \dot{\theta}, t$  を変数として  $L$  を記述せよ。
6.  $\theta$  に関する Lagrange の運動方程式を書け。
7.  $\sin \left[ \frac{\theta}{2} \right]$  を  $q$  とおく。 $q$  は、 $-1 \leq q \leq 1$  を満たす無次元の量である。 $\cos \theta$  を  $q$  で表せ。
8.  $\dot{\theta}^2$  を  $q, \dot{q}$  で表せ。
9.  $q, \dot{q}, t$  を変数として  $L$  を記述せよ。
10.  $q$  に関する Lagrange の運動方程式を書け。
11. 前問で書いた Lagrange の運動方程式を満たす  $q$  の一般解を、2個の任意定数を含む形で書け。
12. 手を放した後、小球はレールに沿って振動する。その振動の周期を求めよ。

## 問題 2 の答

1. (8) 式を微分して

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= \frac{d}{dt} \left( r (\theta + \sin \theta) \right) \\
 &= r \left( \dot{\theta} + \dot{\theta} \cos \theta \right) \\
 &= r \dot{\theta} (1 + \cos \theta)
 \end{aligned} \tag{10}$$

を得る。

- (9) 式を微分して

$$\begin{aligned}
 \dot{y} &= \frac{d}{dt} \left( -r \cos \theta \right) \\
 &= -r \dot{\theta} (-\sin \theta) \\
 &= r \dot{\theta} \sin \theta
 \end{aligned} \tag{11}$$

を得る。

- 2.

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \tag{12}$$

である。

3. (12) 式に (10) 式と (11) 式を代入して

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2} m \left( \left( r \dot{\theta} (1 + \cos \theta) \right)^2 + \left( r \dot{\theta} \sin \theta \right)^2 \right) \\
 &= \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 (1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\
 &= \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 (2 + 2 \cos \theta) \\
 &= m r^2 \dot{\theta}^2 (1 + \cos \theta)
 \end{aligned}$$

を得る。

4. 原点をポテンシャルの基準点とする。

任意の点における小球のポテンシャルエネルギーは、重力  $\begin{pmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{pmatrix}$  によるポテンシャルエネルギー  $mgy$  だけである。すなわち

$$\begin{aligned}
 V &= mgy \\
 &= mg(-r \cos \theta) \\
 &= -mgr \cos \theta
 \end{aligned}$$

である。

5. ラグランジアン の定義より

$$\begin{aligned}
 L &= T - V \\
 &= m r^2 \dot{\theta}^2 (1 + \cos \theta) + mgr \cos \theta
 \end{aligned} \tag{13}$$

である。

6.  $\theta$  に関する Lagrange の運動方程式は

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

である。

(13) 式を代入すると、この式の左辺は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= \frac{d}{dt} \left( 2mr^2 \dot{\theta} (1 + \cos \theta) \right) - \left( -mr^2 \dot{\theta}^2 \sin \theta - mgr \sin \theta \right) \\ &= \left( 2mr^2 \ddot{\theta} (1 + \cos \theta) - 2mr^2 \dot{\theta}^2 \sin \theta \right) - \left( -mr^2 \dot{\theta}^2 \sin \theta - mgr \sin \theta \right) \\ &= mr \left( 2r \ddot{\theta} (1 + \cos \theta) - r \dot{\theta}^2 \sin \theta + g \sin \theta \right) \end{aligned}$$

である。

したがって、 $\theta$  に関する Lagrange の運動方程式は

$$mr \left( 2r \ddot{\theta} (1 + \cos \theta) - r \dot{\theta}^2 \sin \theta + g \sin \theta \right) = 0$$

である。

7.

$$\begin{aligned} \cos \theta &= 1 - 2 \sin^2 \left[ \frac{\theta}{2} \right] \\ &= 1 - 2q^2 \end{aligned} \tag{14}$$

である。

8.

$$\begin{aligned} \dot{\theta}^2 &= \left( \frac{d\theta}{dq} \dot{q} \right)^2 \\ &= \left( \frac{\dot{q}}{\frac{dq}{d\theta}} \right)^2 \\ &= \left( \frac{\dot{q}}{\frac{d}{d\theta} \left( \sin \left[ \frac{\theta}{2} \right] \right)} \right)^2 \\ &= \left( \frac{\dot{q}}{\frac{1}{2} \cos \left[ \frac{\theta}{2} \right]} \right)^2 \\ &= \frac{4\dot{q}^2}{\cos^2 \left[ \frac{\theta}{2} \right]} \\ &= \frac{4\dot{q}^2}{1 - \sin^2 \left[ \frac{\theta}{2} \right]} \\ &= \frac{4\dot{q}^2}{1 - q^2} \end{aligned} \tag{15}$$

である。ただし、第2辺から第3辺への変形は、 $\theta$  が  $q$  の 1 価関数であることを考慮して、逆関数の微分の公式を使った。 $\theta$  が  $q$  の 1 価関数となるのは、 $-\pi \leq \theta \leq \pi$  を満たすからである。

9. (13) 式に (14) 式と (15) 式を代入して

$$\begin{aligned} L &= m r^2 \frac{4\dot{q}^2}{1-q^2} \left(1 + (1-2q^2)\right) + m g r (1-2q^2) \\ &= m r^2 \frac{4\dot{q}^2}{1-q^2} (2-2q^2) + m g r (1-2q^2) \\ &= 8 m r^2 \dot{q}^2 + m g r (1-2q^2) \end{aligned} \quad (16)$$

である。

10.  $q$  に関する Lagrange の運動方程式は

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

である。

(16) 式を代入すると、この式の左辺は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} &= \frac{d}{dt} (16 m r^2 \dot{q}) - (-4 m g r q) \\ &= (16 m r^2 \ddot{q}) - (-4 m g r q) \\ &= 4 m r (4 r \ddot{q} + g q) \end{aligned}$$

である。

したがって、 $q$  に関する Lagrange の運動方程式は

$$4 m r (4 r \ddot{q} + g q) = 0$$

である。

11. 前問の結論より

$$\ddot{q} = -\frac{g}{4r} q$$

が導かれる。

この微分方程式の一般解は、 $A$  と  $\phi$  を任意定数として

$$q = A \sin \left[ \sqrt{\frac{g}{4r}} t + \phi \right]$$

である。

12. 前問の結論より、 $q$  が角振動数  $\sqrt{\frac{g}{4r}}$  で振動することがわかる。

$q$  は  $x, y$  を与える媒介変数とみなせる量であるから、小球の位置も  $q$  と同じ角振動数で振動する。

ゆえに、小球は角振動数  $\sqrt{\frac{g}{4r}}$  で振動する。よって、小球の振動の周期は、 $2\pi \sqrt{\frac{4r}{g}}$  である。

これは、糸の長さ  $4r$  の単振り子の微小振動の周期に等しい。

## 問題 3

2次元空間で、質量  $m$  の質点が運動している。原点から質点までの距離を  $r$  とし、 $k$  を正の定数として、質点は、原点から 大きさ  $kr$  の引力を受ける。

この条件の下で、質点は、原点を中心とする等速円運動をすることができる。この等速円運動からわずかにずれた質点の運動を調べよう。

時刻を  $t$  とする。質点の位置の Descartes 座標を  $x, y$  とし、極座標を  $r, \theta$  とする。

1.  $x, y$  を  $r, \theta$  で表せ。
2.  $\dot{x}, \dot{y}$  を  $r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}$  で表せ。
3. 質点の 運動エネルギー  $T$  を  $m, \dot{x}, \dot{y}$  で表せ。
4. 質点の 運動エネルギー  $T$  を  $m, r, \dot{r}, \dot{\theta}$  で表せ。
5. 質点の ポテンシャルエネルギー  $V$  を  $k, r$  で表せ。
6. 系のラグランジアンを  $L$  とする。  $r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}, t$  を変数として  $L$  を記述せよ。
7.  $r, \theta$  に関する Lagrange の運動方程式を書け。
8. Lagrange の運動方程式より、  $r$  が定数であると仮定すると  $\dot{\theta}$  も定数になることを示せ。
9. Lagrange の運動方程式より、質点の、原点を中心とする 半径  $r_0$  の等速円運動の 角速度  $\omega_0$  を求めよ。
10.  $\Delta r, \Delta \omega$  を  $t$  の関数として、任意の  $t$  に対して  $r = r_0 + \Delta r$  ( $|\Delta r| \ll r_0$ )、 $\dot{\theta} = \omega_0 + \Delta \omega$  ( $|\Delta \omega| \ll \omega_0$ ) と表せるような質点の運動を考える。  $t = 0$  において  $r = r_0$ 、 $\dot{\theta} = \omega_0$  という初期条件において、Lagrange の運動方程式から、 $\Delta r$  が満たすべき微分方程式を導け。



## 問題 3 の答

1. Descartes 座標と極座標との関係より

$$x = r \cos \theta \quad (17)$$

$$y = r \sin \theta \quad (18)$$

である。

2. (17) 式と (18) 式を微分して

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta \quad (19)$$

$$\dot{y} = \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta \quad (20)$$

を得る。

- 3.

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad (21)$$

である。

4. (21) 式に (19) 式と (20) 式を代入して

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m \left( (\dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta)^2 + (\dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta)^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} m \left( \dot{r}^2 \cos^2 \theta - 2 r \dot{r} \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta + r^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta + \dot{r}^2 \sin^2 \theta + 2 r \dot{r} \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta + r^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta \right) \\ &= \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) \end{aligned}$$

を得る。

5. 原点をポテンシャルの基準点とする。

任意の点 P における質点のポテンシャルエネルギー  $V$  は、原点から P までの経路を C とし、位置  $\mathbf{r}'$  において質点が受ける力を  $\mathbf{F}(\mathbf{r}')$  として、線積分

$$- \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}'$$

で与えられる。

この線積分の値は C の選び方によらない。ここでは、C として、原点と P とを結ぶ線分を選ぶ。すると、C 上のどこにおいても

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' = -k r' dr'$$

( $r' = |\mathbf{r}'|$ 、これは位置  $\mathbf{r}'$  の  $r$  座標に等しい) が成り立ち、この右辺を  $r' = 0$  から  $r' = r$  ( $r$  は P の  $r$  座標) まで積分したものが求める線積分になるので、 $V$  を

$$\begin{aligned} V &= - \int_0^r (-k r') dr' \\ &= k \int_0^r r' dr' \\ &= k \left[ \frac{1}{2} r'^2 \right]_0^r \\ &= \frac{1}{2} k r^2 \end{aligned}$$

と求めることができる。



## 6. ラグランジアン の定義より

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ &= \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - \frac{1}{2} k r^2 \end{aligned} \quad (22)$$

である。

7.  $r$  に対する Lagrange の運動方程式

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \quad (23)$$

および、 $\theta$  に対する Lagrange の運動方程式

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad (24)$$

の 2 つが成り立つ。

(22) 式を代入すると、(23) 式の左辺は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} &= \frac{d}{dt} (m \dot{r}) - (m r \dot{\theta}^2 - k r) \\ &= m \ddot{r} - m r \dot{\theta}^2 + k r \end{aligned}$$

であり、(24) 式の左辺は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= \frac{d}{dt} (m r^2 \dot{\theta}) - 0 \\ &= \frac{d}{dt} (m r^2 \dot{\theta}) \end{aligned}$$

である。

したがって、Lagrange の運動方程式は

$$m \ddot{r} - m r \dot{\theta}^2 + k r = 0 \quad (25)$$

$$\frac{d}{dt} (m r^2 \dot{\theta}) = 0 \quad (26)$$

の 2 つである。

## 8. (26) 式を積分すると

$$m r^2 \dot{\theta} = C \quad (27)$$

( $C$  は定数) が導かれる。 $m r^2 \dot{\theta}$  は原点に対する質点の角運動量である。(27) 式は、質点の運動に関して角運動量保存則が成り立つことを表す。

(27) 式より

$$\dot{\theta} = \frac{C}{m r^2}$$

である。 $m$  はそもそも定数であるから、 $r$  が定数であると仮定するなら、 $\dot{\theta}$  も定数になる。

$\dot{\theta}$  は原点に対する質点の角速度である。この結論から、 $r$  が一定であるような質点の運動は、原点に対する角速度も一定、すなわち、等速円運動であることがわかる。

9. 質点が原点を中心とする半径  $r_0$  の等速円運動をしている状況では、前問の結論が成り立つ。そのとき、等速円運動の角速度  $\omega_0$  とは、一定となる  $\dot{\theta}$  のことである。また、当然、 $r = r_0$  であり、 $\ddot{r} = 0$  である。

そこで、(25) 式に  $\ddot{r} = 0$ 、 $r = r_0$ 、 $\dot{\theta} = \omega_0$  を代入して

$$-m r_0 \omega_0^2 + k r_0 = 0$$

とし、 $\omega_0$  について解く。すると

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

が得られる。

10. (25) 式に  $r = r_0 + \Delta r$  および  $\dot{\theta} = \omega_0 + \Delta\omega$  を代入すると

$$\begin{aligned}
m \left( \frac{d^2}{dt^2} (r_0 + \Delta r) \right) - m (r_0 + \Delta r) (\omega_0 + \Delta\omega)^2 + k (r_0 + \Delta r) &= 0 \\
m \frac{d^2(\Delta r)}{dt^2} - m (r_0 + \Delta r) (\omega_0 + \Delta\omega)^2 + k (r_0 + \Delta r) &= 0 \\
\frac{d^2(\Delta r)}{dt^2} - (r_0 + \Delta r) (\omega_0 + \Delta\omega)^2 + \frac{k}{m} (r_0 + \Delta r) &= 0 \\
\frac{d^2(\Delta r)}{dt^2} - (r_0 + \Delta r) (\omega_0 + \Delta\omega)^2 + \omega_0^2 (r_0 + \Delta r) &= 0 \\
\frac{d^2(\Delta r)}{dt^2} - (r_0 + \Delta r) (\omega_0^2 + 2\omega_0 \Delta\omega + \Delta\omega^2) + \omega_0^2 (r_0 + \Delta r) &= 0 \\
\frac{d^2(\Delta r)}{dt^2} - (r_0 + \Delta r) (2\omega_0 \Delta\omega + \Delta\omega^2) &= 0 \\
\frac{d^2(\Delta r)}{dt^2} - (r_0 + \Delta r) (2\omega_0 + \Delta\omega) \Delta\omega &= 0 \\
\frac{d^2(\Delta r)}{dt^2} - 2r_0 \omega_0 \left( 1 + \frac{\Delta r}{r_0} \right) \left( 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right) \Delta\omega &= 0
\end{aligned}$$

を得る。  $\left| \frac{\Delta r}{r_0} \right| \ll 1$ 、  $\left| \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right| \ll 1$  であるから  $\left( 1 + \frac{\Delta r}{r_0} \right) \left( 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right) \cong 1$  とみなすと

$$\frac{d^2(\Delta r)}{dt^2} - 2r_0 \omega_0 \Delta\omega = 0$$

となる。すなわち

$$\frac{d^2(\Delta r)}{dt^2} = 2r_0 \omega_0 \Delta\omega \quad (28)$$

である。

(27) 式より、任意の  $t$  における  $m r^2 \dot{\theta}$  は、  $t = 0$  におけるそれに等しいことが言える。ゆえに、  $m r^2 \dot{\theta}$  に  $r = r_0 + \Delta r$ 、  $\dot{\theta} = \omega_0 + \Delta\omega$  を代入したものと  $r = r_0$ 、  $\dot{\theta} = \omega_0$  を代入したものとを等しいとおいて

$$\begin{aligned}
m (r_0 + \Delta r)^2 (\omega_0 + \Delta\omega) &= m r_0^2 \omega_0 \\
(r_0 + \Delta r)^2 (\omega_0 + \Delta\omega) &= r_0^2 \omega_0 \\
r_0^2 (\omega_0 + \Delta\omega) + (2r_0 \Delta r + \Delta r^2) (\omega_0 + \Delta\omega) &= r_0^2 \omega_0 \\
r_0^2 \omega_0 + r_0^2 \Delta\omega + (2r_0 \Delta r + \Delta r^2) (\omega_0 + \Delta\omega) &= r_0^2 \omega_0 \\
r_0^2 \Delta\omega + (2r_0 \Delta r + \Delta r^2) (\omega_0 + \Delta\omega) &= 0 \\
r_0^2 \Delta\omega + (2r_0 + \Delta r) (\omega_0 + \Delta\omega) \Delta r &= 0 \\
r_0^2 \Delta\omega + 2r_0 \omega_0 \left( 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta r}{r_0} \right) \left( 1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right) \Delta r &= 0 \\
r_0 \Delta\omega + 2\omega_0 \left( 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta r}{r_0} \right) \left( 1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right) \Delta r &= 0
\end{aligned}$$

を得る。  $\left| \frac{\Delta r}{r_0} \right| \ll 1$ 、  $\left| \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right| \ll 1$  であるから  $\left( 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta r}{r_0} \right) \left( 1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right) \cong 1$  とみなすと

$$r_0 \Delta\omega + 2\omega_0 \Delta r = 0$$

すなわち

$$r_0 \Delta\omega = -2\omega_0 \Delta r \quad (29)$$

となる。

(29) 式を (28) 式に代入すれば

$$\frac{d^2(\Delta r)}{dt^2} = -4\omega_0^2 \Delta r$$

が得られる。  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$  であるから

$$\frac{d^2(\Delta r)}{dt^2} = -4 \frac{k}{m} \Delta r$$

と表すこともできる。これが、  $\Delta r$  が満たすべき微分方程式である。

この微分方程式の解は、角振動数  $2\omega_0$  の単振動である。

この設問の状況は、半径  $r_0$ 、角速度  $\omega_0$  で等速円運動を行っている質点に、(角運動量は変化させないように) 瞬間的に微小な外力を加えて速度を変化させた場合に生じる。

以上のことを考慮して、本問の考察を、次のように結論づけることができる。

フックの法則にしたがう中心力場によって安定した等速円運動を行っている質点に、角運動量を変えない微小な擾乱が与えられた場合、擾乱による運動として、等速円運動の軌道のまわりでの微小単振動が起こる。その振動数は等速円運動の回転数の 2 倍 である。

## 2 Hamilton 形式

### 2.1 Legendre 変換

関数  $f(x)$  を考える。

$f(x)$  の導関数  $\frac{df}{dx}$  を  $p(x)$  とし、その逆関数を  $x(p)$  とする。任意の  $p$  の値に対して  $x(p)$  の値が一意に定まるとき、 $f(x)$  から別の関数  $g(p)$  を得る 演算

$$g(p) = px(p) - f(x(p))$$

を Legendre 変換と呼ぶ。

関数  $f$  を Legendre 変換して得られる関数  $g$  は、 $f$  とは別の関数であるが、 $f$  の性質を反映しており、 $f$  と対応関係にある。したがって、 $g$  の性質を調べれば、間接的に  $f$  の性質を知ることができる。

#### 多変数関数への拡張

$f$  が  $N$  変数関数  $f(\mathbf{x})$  ( $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}$ ) である場合にも、同様に Legendre 変換を定義できる。

$x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) についての  $f$  の偏導関数  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  を  $p_i(\mathbf{x})$ 、 $\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} p_1(\mathbf{x}) \\ p_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ p_N(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$  とし、その逆関数を

$\mathbf{x}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} x_1(\mathbf{p}) \\ x_2(\mathbf{p}) \\ \vdots \\ x_N(\mathbf{p}) \end{pmatrix}$  とする。任意の  $\mathbf{p}$  の値に対して  $\mathbf{x}(\mathbf{p})$  の値が一意に定まるとき、 $f(\mathbf{x})$  から別の関数  $g(\mathbf{p})$  を得る

演算

$$\begin{aligned} g(\mathbf{p}) &= \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}(\mathbf{p}) - f(\mathbf{x}(\mathbf{p})) \\ &= \sum_{i=1}^N p_i \cdot x_i(\mathbf{p}) - f(\mathbf{x}(\mathbf{p})) \end{aligned}$$

を Legendre 変換と呼ぶ。

$N$  個の変数のうちの一部のものだけに関する Legendre 変換も、同様に定義できる。

## 2.2 ハミルトニアン

自由度  $N$  の系について、系の状態を表す一般化座標  $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_N \end{pmatrix}$  および一般化速度  $\dot{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_N \end{pmatrix}$  と時刻  $t$  を用

いて書かれたラグランジアン  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  を考える。

$\dot{q}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) についての  $L$  の偏導関数  $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$  を  $p_i$  とし、 $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_N \end{pmatrix}$  とする。 $p_i$  を、「 $q_i$  と正準共役な一般化運動量」と呼ぶ。

$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  の  $\dot{\mathbf{q}}$  に関する Legendre 変換

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$$

を、ハミルトニアンと呼ぶ。ただし、 $\dot{\mathbf{q}}$  は、 $\mathbf{q}, \mathbf{p}, t$  の関数  $\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  である。

### 正準方程式

$\mathbf{q}$  と  $\mathbf{p}$  の時間発展に関して、ハミルトニアンを用いた次の方程式が成り立つ。

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

この方程式を正準方程式と呼ぶ。

正準方程式が成り立つことは、Lagrange の運動方程式が成り立つことと同値である。Lagrange の運動方程式が成り立つことは、Newton の運動方程式が成り立つことと同値である。つまり、正準方程式は、Newton の運動方程式と同等の意味を持つ。

## 問題 4

3次元空間における1個の質点の運動を考える。

質点の位置の Descartes 座標を  $x, y, z$  とする。

質点の質量を  $m$  とし、 $mgz$  ( $g$  は定数) と表されるポテンシャル場が存在するとする。

1. 系のラグランジアンを  $L$  とする。  $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t$  を変数として  $L$  を記述せよ。
2.  $x$  と正準共役な一般化運動量を  $p_x$ 、  $y$  と正準共役な一般化運動量を  $p_y$ 、  $z$  と正準共役な一般化運動量を  $p_z$  とする。  $p_x, p_y, p_z$  を求めよ。
3.  $x, y, z, p_x, p_y, p_z, t$  を変数とした場合のハミルトニアンを  $H$  とする。  $H$  を求めよ。
4.  $x, y, z, p_x, p_y, p_z$  に関する正準方程式を書け。



## 問題 4 の答

1. 質点の運動エネルギーを  $T$ 、ポテンシャルエネルギーを  $V$  とすると

$$L = T - V$$

である。

$T$  と  $V$  は

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \\ V &= m g z \end{aligned}$$

で与えられる。

よって

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - m g z$$

である。

2.  $p_x$  は

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \\ &= m \dot{x} \end{aligned}$$

である。

$p_y$  は

$$\begin{aligned} p_y &= \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \\ &= m \dot{y} \end{aligned}$$

である。

$p_z$  は

$$\begin{aligned} p_z &= \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \\ &= m \dot{z} \end{aligned}$$

である。



3.  $H$  の定義によれば

$$\begin{aligned} H &= p_x \dot{x} + p_y \dot{y} + p_z \dot{z} - L \\ &= p_x \dot{x} + p_y \dot{y} + p_z \dot{z} - \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + m g z \end{aligned}$$

である。これを  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  を用いずに  $x, y, z, p_x, p_y, p_z$  で表した場合に、ハミルトニアンと呼ぶ。

したがって、 $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  を  $p_x, p_y, p_z$  で表す式をこれに代入すれば、ハミルトニアンが得られる。

前問の結論より

$$\dot{x} = \frac{p_x}{m}$$

$$\dot{y} = \frac{p_y}{m}$$

$$\dot{z} = \frac{p_z}{m}$$

が成り立つから、上の  $H$  に代入して

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + m g z$$

を得る。

4. 正準方程式は

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x}$$

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y}$$

$$\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z}$$

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

$$\dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y}$$

$$\dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z}$$

である。

前問で得た  $H$  を代入すると

$$\dot{x} = \frac{p_x}{m}$$

$$\dot{y} = \frac{p_y}{m}$$

$$\dot{z} = \frac{p_z}{m}$$

$$\dot{p}_x = 0$$

$$\dot{p}_y = 0$$

$$\dot{p}_z = -m g$$

となる。

## 問題 5

Lagrange の運動方程式が成り立つ場合に正準方程式が成り立つことを、変分法により導こう。

系の自由度を  $N$  とし、系の状態を表す一般化座標を  $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_N \end{pmatrix}$ 、 $\mathbf{q}$  と正準共役な一般化運動量を  $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_N \end{pmatrix}$

とする。系のラグランジアンを  $L$  とし、 $\mathbf{q}, \mathbf{p}, t$  を変数とした場合のハミルトニアンを  $H$  とする。始状態の時刻を  $t_1$ 、終状態の時刻を  $t_2$  とし、系の  $t_1$  から  $t_2$  までの作用を  $S$  とする。

1.  $L$  を  $p_i, \dot{q}_i, H$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) で表せ。

2.  $\mathbf{q}, \mathbf{p}$  に変分  $\delta \mathbf{q}, \delta \mathbf{p}$  を与えたときに生じる  $\dot{\mathbf{q}}$  の変分を  $\delta \dot{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_N \end{pmatrix}$ 、 $S$  の変分を  $\delta S$  とする。

$\delta S$  を、 $\dot{q}_i, p_i, \frac{\partial H}{\partial q_i}, \frac{\partial H}{\partial p_i}, \delta q_i, \delta p_i, \delta \dot{q}_i, t_1, t_2$  で表せ。

3.  $\delta S$  を、 $\dot{q}_i, \dot{p}_i, \frac{\partial H}{\partial q_i}, \frac{\partial H}{\partial p_i}, \delta q_i, \delta p_i, t_1, t_2$  で表せ。

4. Lagrange の運動方程式が成り立つ場合に、正準方程式

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

が成り立つことを導け。



## 問題 5 の答

1. ハミルトニアン の定義

$$H = \sum_{i=1}^N p_i \dot{q}_i - L$$

より

$$L = \sum_{i=1}^N p_i \dot{q}_i - H \quad (30)$$

である。

- 2.
- $q, p$
- に
- $\delta q, \delta p$
- を与えたときに生じる
- $L$
- の変分を
- $\delta L$
- とすると、
- $\delta S$
- は

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} (L + \delta L) dt - \int_{t_1}^{t_2} L dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt \end{aligned} \quad (31)$$

である。

ここで、 $L$  は (30) 式で表され、 $H$  は  $q_i, p_i, t$  の関数であるから、多変数関数の一般的な性質と (30) 式より

$$\begin{aligned} \delta L &= \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial p_i} \delta p_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^N \left( -\frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i + \left( \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i + p_i \delta \dot{q}_i \right) \end{aligned}$$

が成り立つ。これを使うと、(31) 式より

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^N \left( -\frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i + \left( \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i + p_i \delta \dot{q}_i \right) dt$$

を得る。

3. 前問の結論を変形する。

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^N \left( -\frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i + \left( \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i + p_i \delta \dot{q}_i \right) dt \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{t_1}^{t_2} \left( -\frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i + \left( \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i + p_i \delta \dot{q}_i \right) dt \\ &= \sum_{i=1}^N \left( \int_{t_1}^{t_2} \left( -\frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i + \left( \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i \right) dt + \int_{t_1}^{t_2} p_i \delta \dot{q}_i dt \right)\end{aligned}$$

問題 1 の設問 1. と同様の論理で  $\delta \dot{q} = \frac{d(\delta q)}{dt}$  が成り立つことに留意すると

$$= \sum_{i=1}^N \left( \int_{t_1}^{t_2} \left( -\frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i + \left( \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i \right) dt + \left[ p_i \delta q_i \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \dot{p}_i \delta q_i dt \right)$$

始状態と終状態においては変分が 0、すなわち  $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$  であるから

$$\begin{aligned}&= \sum_{i=1}^N \left( \int_{t_1}^{t_2} \left( -\frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i + \left( \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i \right) dt - \int_{t_1}^{t_2} \dot{p}_i \delta q_i dt \right) \\ &= \sum_{i=1}^N \left( \int_{t_1}^{t_2} \left( -\frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i + \left( \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i - \dot{p}_i \delta q_i \right) dt \right) \\ &= \sum_{i=1}^N \left( \int_{t_1}^{t_2} \left( \left( -\dot{p}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i + \left( \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i \right) dt \right) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^N \left( \left( -\dot{p}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i + \left( \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i \right) dt\end{aligned}$$

を得る。

4. 変分法の考え方によれば、Lagrange の運動方程式が成り立つとき

$$\delta S = 0$$

が成り立つ。

よって、前問の結論より

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^N \left( \left( -\dot{p}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i + \left( \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i \right) dt = 0 \quad (32)$$

が成り立つ。

変分  $\delta q_i, \delta p_i$  はすべて独立に選べる。したがって、どのような  $\delta q_i, \delta p_i$  に対しても (32) 式が成り立つためには、被積分関数の中のすべての  $\delta q_i, \delta p_i$  の係数が 0 でなければならない。このことから

$$-\dot{p}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} = 0 \quad , \quad \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} = 0$$

が成り立つことが導かれる。すなわち

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad , \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

である。

Lagrange の運動方程式が成り立つ場合に正準方程式が成り立つことを、変分法により導けた。

## 問題 6

時刻を  $t$  とする。

2次元空間における1個の質点の運動を考える。

質点の位置を、Descartes 座標  $x, y$  を用いて  $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  とする。

質点の質量を  $m$  とし、 $V(\mathbf{r})$  と表されるポテンシャル場が存在するとする。

$\omega$  を定数として

$$q_1 = x \cos[\omega t] + y \sin[\omega t] \quad (33)$$

$$q_2 = -x \sin[\omega t] + y \cos[\omega t] \quad (34)$$

で表される一般化座標  $q_1, q_2$  を用いて運動を記述してみよう。

1. 系のラグランジアンを  $L$  とする。  $x, y, \dot{x}, \dot{y}, t$  を変数として  $L$  を記述せよ。
2.  $x, y$  を  $q_1, q_2, t, \omega$  で表せ。
3.  $\dot{x}, \dot{y}$  を  $q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2, t, \omega$  で表せ。
4.  $q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2, t$  を変数として  $L$  を記述せよ。
5.  $q_1, q_2$  のそれぞれと正準共役な一般化運動量を  $p_1, p_2$  とする。  $p_1, p_2$  を  $q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2, m, \omega$  で表せ。
6.  $\dot{q}_1, \dot{q}_2$  を  $q_1, q_2, p_1, p_2, m, \omega$  で表せ。
7.  $q_1, q_2, p_1, p_2, t$  を変数とした場合のハミルトニアンを  $H$  とする。  $H$  を求めよ。
8.  $q_1, q_2, p_1, p_2$  に関する正準方程式を書け。
9. 正準方程式から  $p_1, p_2$  を消去し、  $q_1, q_2$  が満たすべき微分方程式を求めなさい。

## 問題 6 の答

1. 質点の運動エネルギーを  $T$ 、ポテンシャルエネルギーを  $V$  とすると

$$L = T - V$$

である。

$T$  と  $V$  は

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \\ V &= V(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

で与えられる。

よって

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V(\mathbf{r}) \quad (35)$$

である。

2. (33) 式と (34) 式を  $x, y$  に関する連立方程式とみなして解くと

$$x = q_1 \cos[\omega t] - q_2 \sin[\omega t] \quad (36)$$

$$y = q_1 \sin[\omega t] + q_2 \cos[\omega t] \quad (37)$$

を得る。

3. (36) 式と (37) 式を微分して

$$\dot{x} = \dot{q}_1 \cos[\omega t] - \omega q_1 \sin[\omega t] - \dot{q}_2 \sin[\omega t] - \omega q_2 \cos[\omega t] \quad (38)$$

$$\dot{y} = \dot{q}_1 \sin[\omega t] + \omega q_1 \cos[\omega t] + \dot{q}_2 \cos[\omega t] - \omega q_2 \sin[\omega t] \quad (39)$$

を得る。

4. (35) 式に (36) 式、(37) 式、(38) 式、(39) 式を代入して

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} m \left( \left( \dot{q}_1 \cos[\omega t] - \omega q_1 \sin[\omega t] - \dot{q}_2 \sin[\omega t] - \omega q_2 \cos[\omega t] \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left( \dot{q}_1 \sin[\omega t] + \omega q_1 \cos[\omega t] + \dot{q}_2 \cos[\omega t] - \omega q_2 \sin[\omega t] \right)^2 \right) - V(\mathbf{r}(\mathbf{q})) \\ &= \frac{1}{2} m \left( \dot{q}_1^2 \cos^2[\omega t] - 2\omega q_1 \dot{q}_1 \sin[\omega t] \cos[\omega t] - 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 \sin[\omega t] \cos[\omega t] - 2\omega q_2 \dot{q}_1 \cos^2[\omega t] \right. \\ &\quad + \omega^2 q_1^2 \sin^2[\omega t] + 2\omega q_1 \dot{q}_2 \sin^2[\omega t] + 2\omega^2 q_1 q_2 \sin[\omega t] \cos[\omega t] \\ &\quad + \dot{q}_2^2 \sin^2[\omega t] + 2\omega q_2 \dot{q}_2 \sin[\omega t] \cos[\omega t] \\ &\quad + \omega^2 q_2^2 \cos^2[\omega t] \\ &\quad + \dot{q}_1^2 \sin^2[\omega t] + 2\omega q_1 \dot{q}_1 \sin[\omega t] \cos[\omega t] + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 \sin[\omega t] \cos[\omega t] - 2\omega q_2 \dot{q}_1 \sin^2[\omega t] \\ &\quad + \omega^2 q_1^2 \cos^2[\omega t] + 2\omega q_1 \dot{q}_2 \cos^2[\omega t] - 2\omega^2 q_1 q_2 \sin[\omega t] \cos[\omega t] \\ &\quad + \dot{q}_2^2 \cos^2[\omega t] - 2\omega q_2 \dot{q}_2 \sin[\omega t] \cos[\omega t] \\ &\quad \left. + \omega^2 q_2^2 \sin^2[\omega t] \right) - V(\mathbf{r}(\mathbf{q})) \\ &= \frac{1}{2} m \left( \dot{q}_1^2 - 2\omega q_2 \dot{q}_1 + \omega^2 q_1^2 + 2\omega q_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2 + \omega^2 q_2^2 \right) - V(\mathbf{r}(\mathbf{q})) \\ &= \frac{1}{2} m \left( (\dot{q}_1 - \omega q_2)^2 + (\dot{q}_2 + \omega q_1)^2 \right) - V(\mathbf{r}(\mathbf{q})) \end{aligned}$$

である。ただし、 $V(\mathbf{r})$  の  $x, y$  に (36) 式と (37) 式を代入したものを  $V(\mathbf{r}(\mathbf{q}))$  と表した。

5.

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \\ &= m(\dot{q}_1 - \omega q_2) \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} p_2 &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \\ &= m(\dot{q}_2 + \omega q_1) \end{aligned} \quad (41)$$

である。

6. (40) 式と (41) 式より

$$\dot{q}_1 = \frac{p_1}{m} + \omega q_2 \quad (42)$$

$$\dot{q}_2 = \frac{p_2}{m} - \omega q_1 \quad (43)$$

を得る。

7. ハミルトニアン の定義より

$$\begin{aligned} H &= p_1 \dot{q}_1 + p_2 \dot{q}_2 - L \\ &= p_1 \dot{q}_1 + p_2 \dot{q}_2 - \frac{1}{2} m \left( (\dot{q}_1 - \omega q_2)^2 + (\dot{q}_2 + \omega q_1)^2 \right) + V(\mathbf{r}(\mathbf{q})) \end{aligned}$$

(42) 式と (43) 式を代入して

$$\begin{aligned} &= p_1 \left( \frac{p_1}{m} + \omega q_2 \right) + p_2 \left( \frac{p_2}{m} - \omega q_1 \right) - \frac{1}{2} m (p_1^2 + p_2^2) + V(\mathbf{r}(\mathbf{q})) \\ &= \frac{1}{2m} (p_1^2 + p_2^2) + \omega (p_1 q_2 - p_2 q_1) + V(\mathbf{r}(\mathbf{q})) \end{aligned}$$

を得る。

8. 正準方程式は

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= \frac{\partial H}{\partial p_1} \\ \dot{q}_2 &= \frac{\partial H}{\partial p_2} \\ \dot{p}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial q_1} \\ \dot{p}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial q_2} \end{aligned}$$

である。

前問で得た  $H$  を代入すると

$$\dot{q}_1 = \frac{p_1}{m} + \omega q_2 \quad (44)$$

$$\dot{q}_2 = \frac{p_2}{m} - \omega q_1 \quad (45)$$

$$\dot{p}_1 = \omega p_2 - \frac{\partial V(\mathbf{r}(\mathbf{q}))}{\partial q_1} \quad (46)$$

$$\dot{p}_2 = -\omega p_1 - \frac{\partial V(\mathbf{r}(\mathbf{q}))}{\partial q_2} \quad (47)$$

となる。



9. (44) 式を微分して

$$\ddot{q}_1 = \frac{\dot{p}_1}{m} + \omega \dot{q}_2$$

(46) 式を代入して

$$\ddot{q}_1 = \frac{\omega}{m} p_2 - \frac{1}{m} \frac{\partial V}{\partial q_1} + \omega \dot{q}_2$$

(41) 式を代入して

$$\ddot{q}_1 = 2\omega \dot{q}_2 + \omega^2 q_1 - \frac{1}{m} \frac{\partial V}{\partial q_1} \quad (48)$$

を得る。ただし、 $\frac{\partial V(\mathbf{r}(\mathbf{q}))}{\partial q_1}$  を  $\frac{\partial V}{\partial q_1}$  と書いた。

(45) 式を微分して

$$\ddot{q}_2 = \frac{\dot{p}_2}{m} - \omega \dot{q}_1$$

(47) 式を代入して

$$\ddot{q}_2 = -\frac{\omega}{m} p_1 - \frac{1}{m} \frac{\partial V}{\partial q_2} - \omega \dot{q}_1$$

(40) 式を代入して

$$\ddot{q}_2 = -2\omega \dot{q}_1 + \omega^2 q_2 - \frac{1}{m} \frac{\partial V}{\partial q_2} \quad (49)$$

を得る。ただし、 $\frac{\partial V(\mathbf{r}(\mathbf{q}))}{\partial q_2}$  を  $\frac{\partial V}{\partial q_2}$  と書いた。

(48) 式と (49) 式を整理し、まとめると、 $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$ 、 $\nabla V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial q_1} \\ \frac{\partial V}{\partial q_2} \end{pmatrix}$  として

$$m \ddot{\mathbf{q}} = -\nabla V + m\omega^2 \mathbf{q} + 2m\omega \begin{pmatrix} \dot{q}_2 \\ -\dot{q}_1 \end{pmatrix} \quad (50)$$

と表せる。

座標系  $(q_1, q_2)$  は座標系  $(x, y)$  に対して反時計回りに角速度  $\omega$  で回転する直角座標系（回転座標系）であり、(50) 式は Newton 形式で得られる回転座標系における運動方程式である。(50) 式の右辺の第 1 項は Newton 形式における力、第 2 項は遠心力、第 3 項は Coriolis の力を表している。

## 問題 7

自由度  $N$  で、運動エネルギー  $T$  が座標  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}$  と定数  $m_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) を用いて

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{x}_i^2$$

と表され、ポテンシャルエネルギー  $V$  が  $x_i$  と  $t$  を陽に含まず  $V(\mathbf{x})$  と表されるような系を考える。

一般化座標  $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_N \end{pmatrix}$  およびそれらと正準共役な一般化運動量  $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_N \end{pmatrix}$  で記述したハミルトニアンを  $H$  と

する。  $\mathbf{x}$  と  $\mathbf{q}$  の関係を表す関数  $\mathbf{x}(\mathbf{q})$  は  $t$  を陽に含まないとする。

このとき、  $H$  が系の全エネルギー  $T + V$  に等しいことを示そう。

1.  $T$  を  $\dot{q}_i, \frac{\partial x_i}{\partial q_j}, m_i$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ) で表せ。

2.  $p_i$  を  $\dot{q}_i, \frac{\partial x_i}{\partial q_j}, m_i$  で表せ。

3.  $\sum_{i=1}^N p_i \dot{q}_i$  を  $\dot{q}_i, \frac{\partial x_i}{\partial q_j}, m_i$  で表せ。

4.  $H = T + V$  を導け。



## 問題 7 の答

1. 一般の座標変換では、 $x$  は  $q$  と  $t$  の関数  $x(q, t)$  として表される。そのとき、多変数関数の一般的な性質により

$$\dot{x} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial x}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x}{\partial t}$$

が成り立つ。ここでは、 $x$  は  $t$  を陽に含まず  $x(q)$  と表されるから

$$\dot{x} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial x}{\partial q_j} \dot{q}_j$$

である。すなわち

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^N \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j$$

が成り立つ。

これを

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{x}_i^2$$

に代入すれば

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left( \sum_{j=1}^N \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right)^2 \quad (51)$$

となる。

2.  $p_i$  の定義より

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \\ &= \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} \end{aligned}$$

$V$  は  $\dot{x}_i$  を含まず  $x$  だけの関数として表せ、 $x$  は  $q$  の関数であって  $\dot{q}_i$  には依存しないので、 $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} = 0$  であり

$$= \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$$

前問の結論を代入して

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left( \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j \left( \sum_{k=1}^N \frac{\partial x_j}{\partial q_k} \dot{q}_k \right)^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j \cdot 2 \left( \sum_{k=1}^N \frac{\partial x_j}{\partial q_k} \dot{q}_k \right) \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N m_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \frac{\partial x_j}{\partial q_k} \dot{q}_k \end{aligned}$$

を得る。

3.  $\sum_{i=1}^N p_i \dot{q}_i$  に、前問の結論を代入する。

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^N p_i \dot{q}_i &= \sum_{i=1}^N \left( \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N m_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \frac{\partial x_j}{\partial q_k} \dot{q}_k \right) \dot{q}_i \\
 &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N m_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \frac{\partial x_j}{\partial q_k} \dot{q}_i \dot{q}_k \\
 &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N m_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \dot{q}_i \left( \sum_{k=1}^N \frac{\partial x_j}{\partial q_k} \dot{q}_k \right) \\
 &= \sum_{j=1}^N m_j \left( \sum_{i=1}^N \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) \left( \sum_{k=1}^N \frac{\partial x_j}{\partial q_k} \dot{q}_k \right) \\
 &= \sum_{j=1}^N m_j \left( \sum_{k=1}^N \frac{\partial x_j}{\partial q_k} \dot{q}_k \right)^2
 \end{aligned} \tag{52}$$

となる。

4. (51) 式と (52) 式の比較により

$$\sum_{i=1}^N p_i \dot{q}_i = 2T$$

であることがわかる。

よって、 $H$  の定義より

$$\begin{aligned}
 H &= \sum_{i=1}^N p_i \dot{q}_i - L \\
 &= 2T - L \\
 &= 2T - (T - V) \\
 &= T + V
 \end{aligned}$$

が導かれる。

## 2.3 位相空間

Lagrange 形式は、自由度  $N$  の系を記述するのに  $N$  個の変数（一般化座標  $q_1, \dots, q_N$ ）が必要という立場をとる。Lagrange の運動方程式は、これら  $N$  個の変数を解くための  $N$  個の方程式を与える。それらは 2 階微分方程式である。

Hamilton 形式は、自由度  $N$  の系を記述するのに  $2N$  個の変数（一般化座標  $q_1, \dots, q_N$  と一般化運動量  $p_1, \dots, p_N$ ）が必要という立場をとる。正準方程式は、これら  $2N$  個の変数を解くための  $2N$  個の方程式を与える。それらは 1 階微分方程式である。

そのため、Hamilton 形式では、物体の運動を、 $q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N$  の  $2N$  次元空間での点の運動として表現することがある。この  $2N$  次元空間を位相空間と呼ぶ。

たとえば、1 次元調和振動子の運動は、 $q, p$  の 2 次元の位相空間での楕円運動である。図 1 にその様子を示す。図 1 の左側は  $t$  に対する  $q$  と  $p$  の変化である。角振動数を  $\omega$ 、 $q$  の振幅を  $A$  とした。 $p$  は振幅が  $m\omega A$  で位相が  $q$  に対して  $\frac{\pi}{2}$  遅れた振動になる。図 1 の右側はそれらを合わせて位相空間に表したものである。

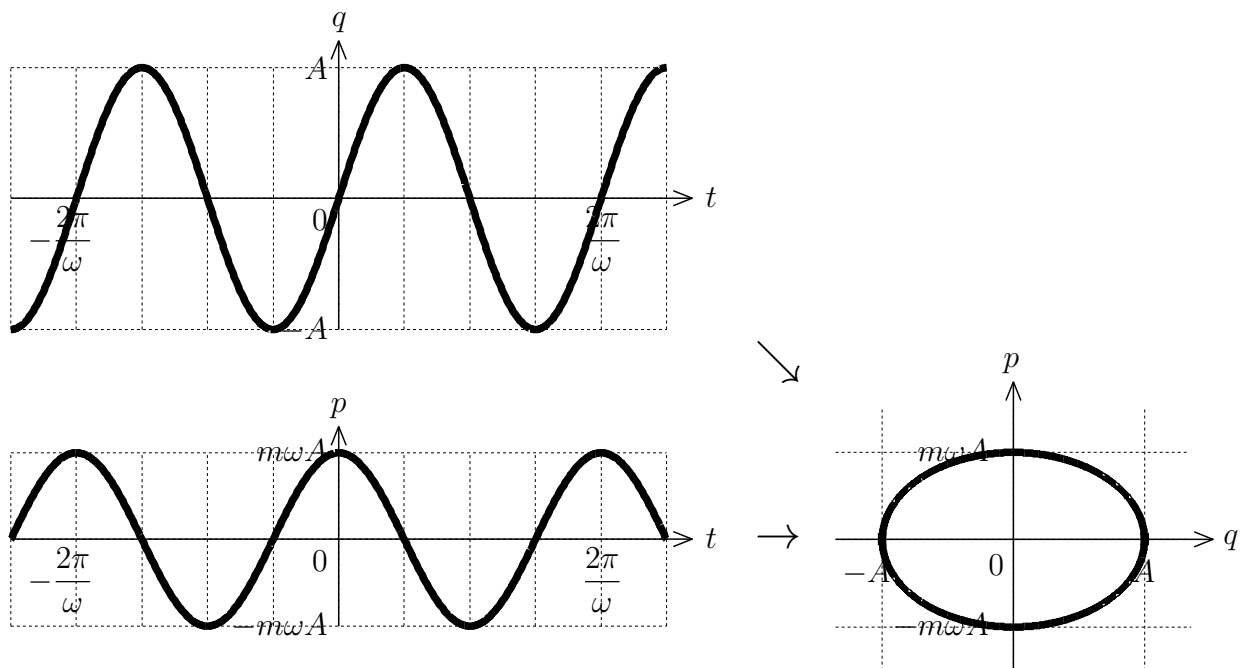


図 1

正準方程式は、 $\dot{q}, \dot{p}$  を  $q, p, t$  の関数として与える方程式、すなわち、時刻と位相空間での位置を定めると位相空間での速度を与える方程式である。違う言い方をすれば、ある瞬間の位置から微小時間後の位置を与える方程式とも言える。これは、見方によっては、系の状態の時間発展を調べるのに都合の良い、優れた形式であると言える。

## 2.4 正準変換

### 正準変数

Lagrange 形式において一般化座標を用いることの利点は、系の状態を表すのに、いかなる次元のいかなる量でも用いることが可能であり、どれを用いても Lagrange の運動方程式の形が不変であることにあった。

Hamilton 形式においても同じことが言える。ただし、Hamilton 形式においては、一般化運動量は一般化座標と正準共役なものではないという制約がつく。

この制約を満たす変数の組  $q, p$  を正準変数と呼ぶ。

Hamilton 形式は、変数の組が正準変数であるという条件を満たす限り、Lagrange 形式と同様の特徴（一般化座標の選び方が自由で、正準方程式の形が不変）を持つ。

### 正準変換

正準変数から別の正準変数への変数変換を正準変換と呼ぶ。

正準変換においては、 $q$  と  $p$  に区別はなく、両者を対等に扱うことができる。すなわち、正準変数  $q, p$  から別の正準変数  $Q, P$  への正準変換

$$\begin{aligned} Q &= Q(q, p, t) \\ P &= P(q, p, t) \end{aligned}$$

(右辺は  $Q$  と  $P$  を  $q, p, t$  で表す関数) では、 $q$  と  $p$ 、 $Q$  と  $P$  の物理的な意味の違いを考慮することなく、右辺を定めることができる。課せられる条件は、 $Q$  と  $P$  が互いに正準共役であることだけである。

少し具体的に述べよう。

座標変換として、たとえば、2次元 Descartes 座標の  $x$ - $y$  面内での  $x$  軸と  $y$  軸の平行移動や鏡像、回転などを考えることができる。正準変換では、それに加えて、運動量  $p_x, p_y$  も絡めた変換、たとえば、位相空間の  $x$ - $p_x$  面内での  $x$  軸と  $p_x$  軸の回転なども考えることができる。それによって与えられる一般化座標と一般化運動量は、正準共役な量の組というだけで、もはや位置や運動量としての意味を持たない。

このような考え方は、正準変換の概念によらなければ、発想しにくい。

### ハミルトニアンの変換

正準変数  $q, p$  で系を記述した場合のハミルトニアンを  $H$ 、正準変数  $Q, P$  で系を記述した場合のハミルトニアンを  $K$  とすると、一般に、 $H$  と  $K$  は一致しない。

つまり、 $q, p$  から  $Q, P$  への正準変換とは、 $H$  に  $q(Q, P, t)$  と  $p(Q, P, t)$  ( $q$  と  $p$  を  $Q, P, t$  で表す関数) を代入してハミルトニアンとすることではない。 $Q, P$  を用いてハミルトニアンの定義から  $K$  を求めることなのである。

## 2.5 母関数

ある正準変数  $q, p$  から別の正準変数  $Q, P$  への正準変換を考える。  $q, p$  で系を記述した場合のハミルトニアンを  $H$ 、  $Q, P$  で系を記述した場合のハミルトニアンを  $K$  とする。

正準変換には、各々の変換に対応する、**母関数**と呼ばれる関数が存在する。

母関数は、1つの正準変換に対して4種類存在する。  $q, Q, t$  を変数とする  $W_1(q, Q, t)$ 、  $q, P, t$  を変数とする  $W_2(q, P, t)$ 、  $p, Q, t$  を変数とする  $W_3(p, Q, t)$ 、  $p, P, t$  を変数とする  $W_4(p, P, t)$  である。

$W_1, W_2, W_3, W_4$  は、以下の性質を満たす。

$$\begin{array}{lll}
 p_i = \frac{\partial W_1}{\partial q_i} & P_i = -\frac{\partial W_1}{\partial Q_i} & K = H + \frac{\partial W_1}{\partial t} \\
 p_i = \frac{\partial W_2}{\partial q_i} & Q_i = \frac{\partial W_2}{\partial P_i} & K = H + \frac{\partial W_2}{\partial t} \\
 q_i = -\frac{\partial W_3}{\partial p_i} & P_i = -\frac{\partial W_3}{\partial Q_i} & K = H + \frac{\partial W_3}{\partial t} \\
 q_i = -\frac{\partial W_4}{\partial p_i} & Q_i = \frac{\partial W_4}{\partial P_i} & K = H + \frac{\partial W_4}{\partial t}
 \end{array}$$

母関数を利用して、Hamilton-Jacobi の偏微分方程式による運動方程式の解法の考え方を導くことができる。





## 問題 8

自由度  $N$  で、正準変数  $\mathbf{q}, \mathbf{p}$  で記述したハミルトニアン  $H$  が

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{1}{m_i} p_i^2 + V(\mathbf{q}, t)$$

である系について考える。 $m_i$  は定数。 $V(\mathbf{q}, t)$  は系のポテンシャルエネルギーで、 $\mathbf{p}$  を陽に含まないとする。

以下の母関数から得られる正準変換に関して、 $\mathbf{Q}, \mathbf{P}$  を  $\mathbf{q}, \mathbf{p}$  で表す関数  $\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  と、 $\mathbf{Q}, \mathbf{P}$  で記述したハミルトニアン  $K$  を求めよ。

1.  $N = 2$  で、 $q_1, q_2$  を  $x, y$  と書く。定数  $m$  を用い、 $m_1 = m_2 = m$  であるとして

$$W_2 = P_1 \left( x \cos[\omega t] + y \sin[\omega t] \right) + P_2 \left( -x \sin[\omega t] + y \cos[\omega t] \right)$$

2.  $W_4 = \mathbf{p} \cdot \mathbf{P}$

3.  $N = 3$  で、定数  $m$ 、 $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ 、 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$  を用い、 $m_1 = m_2 = m_3 = m$  であるとして

$$W_2 = (\mathbf{q} - \mathbf{v}t + \mathbf{A}) \cdot \mathbf{P} + m \mathbf{v} \cdot \mathbf{q} - \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 t$$

4.  $N = 1$  で、 $q, p, Q, P, m$  の添字を省略して書く。定数  $\omega$  を用い、 $V(q, t) = V(q) = \frac{1}{2} m \omega^2 q^2$  であるとして

$$W_2 = \sqrt{2m} \int_0^q \sqrt{P - V(q')} dq' - Pt$$

## 問題 8 の答

1.  $p_1, p_2$  を  $p_x, p_y$  と書く。

母関数の性質より

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{\partial W_2}{\partial x} \\ &= P_1 \cos[\omega t] - P_2 \sin[\omega t] \end{aligned} \quad (53)$$

$$\begin{aligned} p_y &= \frac{\partial W_2}{\partial y} \\ &= P_1 \sin[\omega t] + P_2 \cos[\omega t] \end{aligned} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{\partial W_2}{\partial P_1} \\ &= x \cos[\omega t] + y \sin[\omega t] \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} Q_2 &= \frac{\partial W_2}{\partial P_2} \\ &= -x \sin[\omega t] + y \cos[\omega t] \end{aligned} \quad (56)$$

である。(53) 式と (54) 式を  $P_1, P_2$  について解き、その結果を (55) 式、(56) 式とともに並べると

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos[\omega t] + y \sin[\omega t] \\ -x \sin[\omega t] + y \cos[\omega t] \\ p_x \cos[\omega t] + p_y \sin[\omega t] \\ -p_x \sin[\omega t] + p_y \cos[\omega t] \end{pmatrix}$$

を得る。

$K$  は

$$\begin{aligned} K &= H + \frac{\partial W_2}{\partial t} \\ &= H + \omega \left( P_1 \left( -x \sin[\omega t] + y \cos[\omega t] \right) + P_2 \left( -x \cos[\omega t] - y \sin[\omega t] \right) \right) \\ &= \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2) + V(\mathbf{q}, t) + \omega \left( P_1 \left( -x \sin[\omega t] + y \cos[\omega t] \right) + P_2 \left( -x \cos[\omega t] - y \sin[\omega t] \right) \right) \end{aligned}$$

(53) 式と (54) 式を代入すると

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2m} \left( \left( P_1 \cos[\omega t] - P_2 \sin[\omega t] \right)^2 + \left( P_1 \sin[\omega t] + P_2 \cos[\omega t] \right)^2 \right) + V(\mathbf{q}, t) \\ &\quad + \omega \left( P_1 \left( -x \sin[\omega t] + y \cos[\omega t] \right) + P_2 \left( -x \cos[\omega t] - y \sin[\omega t] \right) \right) \end{aligned}$$

(55) 式と (56) 式を  $x, y$  について解いた  $\mathbf{q}(\mathbf{Q}) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1 \cos[\omega t] - Q_2 \sin[\omega t] \\ Q_1 \sin[\omega t] + Q_2 \cos[\omega t] \end{pmatrix}$  を代入すると

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2m} \left( \left( P_1 \cos[\omega t] - P_2 \sin[\omega t] \right)^2 + \left( P_1 \sin[\omega t] + P_2 \cos[\omega t] \right)^2 \right) + V(\mathbf{q}(\mathbf{Q}), t) \\ &\quad + \omega \left( P_1 \left( - \left( Q_1 \cos[\omega t] - Q_2 \sin[\omega t] \right) \sin[\omega t] + \left( Q_1 \sin[\omega t] + Q_2 \cos[\omega t] \right) \cos[\omega t] \right) \right. \\ &\quad \left. + P_2 \left( - \left( Q_1 \cos[\omega t] - Q_2 \sin[\omega t] \right) \cos[\omega t] - \left( Q_1 \sin[\omega t] + Q_2 \cos[\omega t] \right) \sin[\omega t] \right) \right) \\ &= \frac{1}{2m} (P_1^2 + P_2^2) + V(\mathbf{q}(\mathbf{Q}), t) + \omega (P_1 Q_2 - P_2 Q_1) \end{aligned}$$

となる。

この正準変換は、問題 6 で扱った、Descartes 座標系から回転座標系への変換である。ハミルトニアン  $K$  は、問題 6 で得たものと一致している。

## 2. 母関数の性質より

$$\begin{aligned} q_i &= -\frac{\partial W_4}{\partial p_i} \\ &= -P_i \end{aligned} \quad (57)$$

$$\begin{aligned} Q_i &= \frac{\partial W_4}{\partial P_i} \\ &= p_i \end{aligned} \quad (58)$$

である。(57) 式を  $P_i$  について解き、その結果を (58) 式とともに並べると

$$\begin{pmatrix} Q_i \\ P_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_i \\ -q_i \end{pmatrix}$$

を得る。

$K$  は

$$\begin{aligned} K &= H + \frac{\partial W_4}{\partial t} \\ &= H \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{1}{m_i} p_i^2 + V(\mathbf{q}, t) \end{aligned}$$

(58) 式を  $p_i$  について解いた  $p_i = Q_i$  および (57) 式を代入すると

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{1}{m_i} Q_i^2 + V(-\mathbf{P}, t)$$

となる。

この正準変換は、運動量を一般化座標とし、座標を一般化運動量とする変換である。正準変換においては、一般化座標と一般化運動量の間には物理的な区別がなく、対等に扱うことができることを端的に示す例と考えられる。

## 3. 母関数の性質より

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial W_2}{\partial q_i} \\ &= P_i + m v_i \end{aligned} \quad (59)$$

$$\begin{aligned} Q_i &= \frac{\partial W_2}{\partial P_i} \\ &= q_i - v_i t + A_i \end{aligned} \quad (60)$$

である。(59) 式を  $P_i$  について解き、その結果を (60) 式とともに並べると

$$\begin{pmatrix} Q_i \\ P_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_i - v_i t + A_i \\ p_i - m v_i \end{pmatrix}$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{q} - \mathbf{v} t + \mathbf{A} \\ \mathbf{p} - m \mathbf{v} \end{pmatrix} \quad (61)$$

を得る。

$K$  は

$$\begin{aligned} K &= H + \frac{\partial W_2}{\partial t} \\ &= H - \mathbf{v} \cdot \mathbf{P} - \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 \\ &= \frac{1}{2m} \mathbf{p}^2 + V(\mathbf{q}, t) - \mathbf{v} \cdot \mathbf{P} - \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 \end{aligned}$$

(61) 式を  $\mathbf{q}, \mathbf{p}$  について解いた  $\begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q} + \mathbf{v} t - \mathbf{A} \\ \mathbf{P} + m \mathbf{v} \end{pmatrix}$  を代入すると

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2m} (\mathbf{P} + m \mathbf{v})^2 + V(\mathbf{Q} + \mathbf{v} t - \mathbf{A}, t) - \mathbf{v} \cdot \mathbf{P} - \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 \\ &= \frac{1}{2m} \mathbf{P}^2 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{P} + \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 + V(\mathbf{Q} + \mathbf{v} t - \mathbf{A}, t) - \mathbf{v} \cdot \mathbf{P} - \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 \\ &= \frac{1}{2m} \mathbf{P}^2 + V(\mathbf{Q} + \mathbf{v} t - \mathbf{A}, t) \end{aligned}$$

となる。

この正準変換は、慣性系から別の慣性系への Galilei 変換である。変換後の座標軸は変換前の座標軸に平行であり、変換後の座標系の原点は変換前の座標系の原点に対して速度  $\mathbf{v}$  で等速度運動する。時刻  $t = 0$  において変換後の座標系の原点は変換前の座標系の原点に対して  $-\mathbf{A}$  の位置にある。

## 4. 母関数の性質より

$$\begin{aligned}
p &= \frac{\partial W_2}{\partial q} \\
&= \sqrt{2m} \sqrt{P - V(q)} \\
&= \sqrt{2m} \sqrt{P - \frac{1}{2} m \omega^2 q^2}
\end{aligned} \tag{62}$$

$$\begin{aligned}
Q &= \frac{\partial W_2}{\partial P} \\
&= \sqrt{2m} \int_0^q \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{P - V(q')}} dq' - t \\
&= \sqrt{2m} \int_0^q \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{P - \frac{1}{2} m \omega^2 q'^2}} dq' - t
\end{aligned}$$

$q'$  を  $q' = \frac{\sqrt{2P}}{\sqrt{m}\omega} \sin \theta$  かつ  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  なる  $\theta$  に変数変換して

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{2m} \int_0^{\arcsin\left[\frac{\sqrt{m}\omega q}{\sqrt{2P}}\right]} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{P - P \sin^2 \theta}} \cdot \frac{\sqrt{2P}}{\sqrt{m}\omega} \cos \theta d\theta - t \\
&= \frac{1}{\omega} \int_0^{\arcsin\left[\frac{\sqrt{m}\omega q}{\sqrt{2P}}\right]} \frac{\cos \theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}} d\theta - t \\
&= \frac{1}{\omega} \int_0^{\arcsin\left[\frac{\sqrt{m}\omega q}{\sqrt{2P}}\right]} \frac{\cos \theta}{\cos \theta} d\theta - t \\
&= \frac{1}{\omega} \int_0^{\arcsin\left[\frac{\sqrt{m}\omega q}{\sqrt{2P}}\right]} d\theta - t \\
&= \frac{1}{\omega} \arcsin\left[\frac{\sqrt{m}\omega q}{\sqrt{2P}}\right] - t
\end{aligned} \tag{63}$$

( $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin\left[\frac{\sqrt{m}\omega q}{\sqrt{2P}}\right] \leq \frac{\pi}{2}$ ) である。(62) 式を  $P$  について解くと

$$P = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 \tag{64}$$

を得る。(64) 式を (63) 式に代入すると

$$Q = \frac{1}{\omega} \arcsin\left[\frac{\sqrt{m}\omega q}{\sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2}}\right] - t \tag{65}$$

を得る。

$K$  は

$$\begin{aligned}
K &= H + \frac{\partial W_2}{\partial t} \\
&= H - P \\
&= \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 - P
\end{aligned}$$

(64) 式を代入して

$$= 0$$

である。

この正準変換が何なのかを考えるために、 $Q, P$  で記述した正準方程式を考えると

$$\begin{aligned}\dot{Q} &= \frac{\partial K}{\partial P} \\ &= 0 \\ \dot{P} &= -\frac{\partial K}{\partial Q} \\ &= 0\end{aligned}$$

であり、 $Q$  も  $P$  も時間変化しない、すなわち定数であることがわかる。

(64) 式によれば、 $P$  は  $H$  である。 $q$  が慣性系の座標ならば、 $H$  は系の力学的エネルギーである。そのとき、 $P$  が定数であることは、系で力学的エネルギー保存則が成り立つことを意味する。

そこで、一定である  $P$  の値を  $E$  とする。

すると、(65) 式を

$$Q = \frac{1}{\omega} \arcsin \left[ \frac{\sqrt{m\omega} q}{\sqrt{2E}} \right] - t$$

と表すことができる。これを变形すると

$$q = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin[\omega(t+Q)] \quad (66)$$

が得られる。 $q$  が慣性系の座標ならば、 $Q$  が定数であることと (66) 式は、系が調和振動子であること、そして、系が原点を正の向きに通過する時刻の 1 つを  $t_0$  として、 $Q$  が  $-t_0$  であることを示している。

この正準変換は、調和振動子の「位置と運動量」から「時間の原点と力学的エネルギー」への変換である。

なお、(66) 式が運動方程式の解そのものであることには留意すべきである。この例のように、 $K=0$  を与えるような正準変換では、 $Q, P$  が定数となる。そのとき、正準変換を表す関数  $q(Q, P, t), p(Q, P, t)$  は、 $q, p$  を  $t$  と定数  $Q, P$  で表す式なのであるから、運動方程式の解そのものになっている。つまり、 $K=0$  を与える正準変換を見つけることは、運動方程式の解を求めることと同等の意味を持つのである。