

高校生が演習で学ぶ  
Fourier 解析

服部修平

2023 年 7 月 15 日

# 1 線型代数の基礎

## 1.1 基底

$n$ 次元ベクトルは、たとえば

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (n = 3)$$

のように表せる。

$n$ 次元実ベクトルすべての集合は、 $n$ 次元空間である。

$n$ 次元空間は、 $n$ 個の基底ベクトルを選べば、すべての点を基底の線型結合で表せる。このような空間を、線型空間と呼ぶ。

最もわかりやすい基底の例 $n = 3$  で

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と選べば、任意のベクトル  $x$  を

$$x = \bullet e_1 + \blacksquare e_2 + \blacktriangle e_3$$

(  $e_1, e_2, e_3$  の線型結合 ) の形に表せる。具体的には

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$$

である。

 $\{e_1, e_2, e_3\}$  は、最もわかりやすく、単純で、便利な基底の組 (正規直交基底) である。正規直交基底については後述する。他の基底の例 $n = 3$  で

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

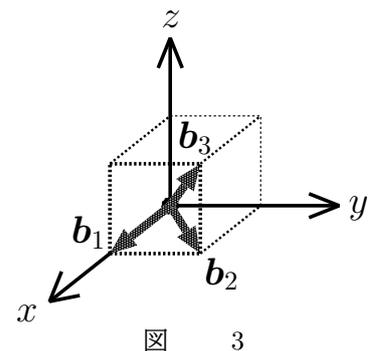
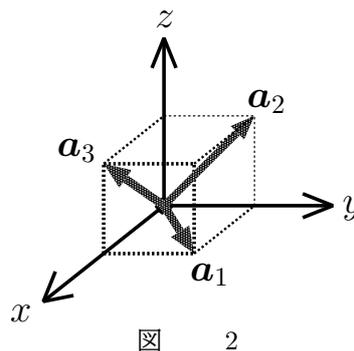
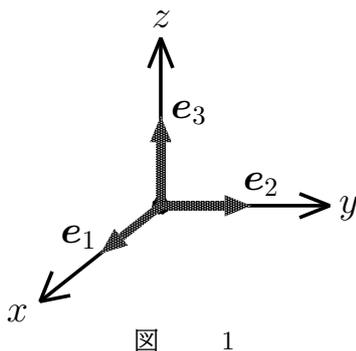
の組は基底になり得る。

さらに別の基底の例 $n = 3$  で

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

の組は基底になり得る。

以上の3つの基底を図示すると、それぞれ、図1、図2、図3のようになる。



結局、ベクトルというのは、 $n$  個の基底を任意の比率で混ぜあわせたものである、と言える。線型結合の各係数 (  $\bullet$ 、 $\blacksquare$ 、 $\blacktriangle$  ) は、そのベクトルに各基底ベクトルがどれだけの比率で入っているかを表す値である。ベクトルの成分とは、正規直交基底  $\{e_1, e_2, e_3\}$  に対する  $\bullet$ 、 $\blacksquare$ 、 $\blacktriangle$  の値である。

## 問題 1

3次元線型空間を考える。

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

とする。

1.  $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$  を基底として、 $\mathbf{x}$  を基底の線型結合で表せ。
2.  $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$  を基底として、 $\mathbf{x}$  を基底の線型結合で表せ。

## 問題 1 の答

1.

$$\boldsymbol{x} = x_{a1} \boldsymbol{a}_1 + x_{a2} \boldsymbol{a}_2 + x_{a3} \boldsymbol{a}_3$$

とおくと

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= x_{a1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_{a2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_{a3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_{a1} + x_{a3} \\ x_{a1} + x_{a2} \\ x_{a2} + x_{a3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

が成り立つ。これを 3 元 1 次連立方程式とみなして  $x_{a1}, x_{a2}, x_{a3}$  について解くと

$$\begin{aligned} x_{a1} &= \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - x_3) \\ x_{a2} &= \frac{1}{2}(-x_1 + x_2 + x_3) \\ x_{a3} &= \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + x_3) \end{aligned}$$

を得る。

よって

$$\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - x_3) \boldsymbol{a}_1 + \frac{1}{2}(-x_1 + x_2 + x_3) \boldsymbol{a}_2 + \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + x_3) \boldsymbol{a}_3$$

である。

2.

$$\boldsymbol{x} = x_{b1} \boldsymbol{b}_1 + x_{b2} \boldsymbol{b}_2 + x_{b3} \boldsymbol{b}_3$$

とおくと

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= x_{b1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_{b2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_{b3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_{b1} + x_{b2} + x_{b3} \\ x_{b2} + x_{b3} \\ x_{b3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

が成り立つ。これを 3 元 1 次連立方程式とみなして  $x_{b1}, x_{b2}, x_{b3}$  について解くと

$$\begin{aligned} x_{b1} &= x_1 - x_2 \\ x_{b2} &= x_2 - x_3 \\ x_{b3} &= x_3 \end{aligned}$$

を得る。

よって

$$\boldsymbol{x} = (x_1 - x_2) \boldsymbol{b}_1 + (x_2 - x_3) \boldsymbol{b}_2 + x_3 \boldsymbol{b}_3$$

である。

## 1.2 直交基底

2つのベクトルの内積が0である ( $A \cdot B = 0$ ) とき、 $A$  と  $B$  は直交しているという。

どの2つの組み合わせも直交している基底を、直交基底という。

### 直交基底の便利さ

ベクトルを表すのに、直交しない基底を用いて表した場合、ある基底ベクトル成分が変化することによって別の基底ベクトル成分への射影も変化する。これは不便である。

たとえば、 $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$  を基底として、力  $\mathbf{F}$  を  $\mathbf{F} = F_{a1} \mathbf{a}_1 + F_{a2} \mathbf{a}_2 + F_{a3} \mathbf{a}_3$  と表すとす。  $\mathbf{a}_1$  方向の力学だけを考えた場合に、 $\mathbf{F}$  の  $\mathbf{a}_1$  成分の値  $F_{a1}$  だけを知れば済むかというそうではない。 $\mathbf{F}$  の  $\mathbf{a}_2$  成分  $F_{a2} \mathbf{a}_2$  の  $\mathbf{a}_1$  成分への射影が、 $\mathbf{a}_1$  方向の運動で仕事をしてしまう。したがって、 $\mathbf{a}_1$  方向の力学だけを考えるのであっても、 $F_{a1}$ 、 $F_{a2}$ 、 $F_{a3}$  を知る必要がある。

いっぽう、 $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$  を直交基底とし、これを用いて  $\mathbf{F}$  を表せば、 $\mathbf{F}$  の  $\mathbf{c}_2$  成分  $F_{c2} \mathbf{c}_2$  の  $\mathbf{c}_1$  成分への射影は 0。 $\mathbf{c}_3$  成分についても同様である。つまり、ある基底ベクトル成分は別の基底ベクトル成分に影響を与えない。

以上のようなことから、ベクトルを表す基底として直交基底を用いると便利である。

直交基底を用いると、 $\mathbf{x}$  と基底ベクトルとの内積をとることによって、関心の無い基底ベクトル成分を  $\mathbf{x}$  から除くことができる。

$$\mathbf{x} = x_{c1} \mathbf{c}_1 + x_{c2} \mathbf{c}_2 + x_{c3} \mathbf{c}_3$$

とすると、 $\mathbf{x}$  と  $\mathbf{c}_1$  の内積をとることによって

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \cdot \mathbf{c}_1 &= x_{c1} \underbrace{\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_1}_{|\mathbf{c}_1|^2} + x_{c2} \underbrace{\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{c}_1}_0 + x_{c3} \underbrace{\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{c}_1}_0 \\ &= x_{c1} |\mathbf{c}_1|^2 \end{aligned}$$

となり、 $\mathbf{x}$  の  $\mathbf{c}_1$  成分だけを取り出すことができる。

### 正規直交基底

自分自身との内積が 1 であるようなベクトルを単位ベクトルと呼ぶ。

すべての基底ベクトルが単位ベクトルであるような直交基底を、正規直交基底という。

もし、上の  $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$  が正規直交基底であれば

$$|\mathbf{c}_1|^2 = 1$$

であるので

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{c}_1 = x_{c1}$$

となる。同様に

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{c}_2 = x_{c2}$$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{c}_3 = x_{c3}$$

となる。この性質は、とても便利である。

### 1.3 ベクトルの拡張

$n = 3$  の場合が物理的なイメージを描きやすいので例として示してきたが、もちろん、 $n$  は 4 以上の場合もある。  
例。  $n = 5$  では

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

のように表せ、内積は

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 + A_4 B_4 + A_5 B_5$$

となる。

ここで、 $n = \infty$  の場合もベクトルを定義できるものとする。 $n = \infty$  では

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

のように表せ、内積は

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 + A_4 B_4 + A_5 B_5 + \cdots \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k B_k \end{aligned}$$

となる。

次に、ベクトルの成分を表す添字として、整数以外も使えるものとする。たとえば、4 つの成分を持つベクトルとして

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_{\frac{1}{2}} \\ x_1 \\ x_{\frac{3}{2}} \\ x_2 \end{pmatrix}$$

を考えてもよい。この場合、内積は

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= A_{\frac{1}{2}} B_{\frac{1}{2}} + A_1 B_1 + A_{\frac{3}{2}} B_{\frac{3}{2}} + A_2 B_2 \\ &= \sum_{k=1}^4 A_{\frac{k}{2}} B_{\frac{k}{2}} \end{aligned}$$

と表せる。

いまの例は、単に、成分の「呼び方」を変えたに過ぎなく、実質的には  $n = 4$  のベクトルと何ら変わりがない。  
次の例では、かなり様相が変わる。

ベクトルの成分を表す添字として、実数全体を使うことを考える。

実数の個数は無限個であるから、この場合、ベクトルの成分の数は無限個である。前に見た  $n = \infty$  の場合も、やはり、ベクトルの成分の数は無限個であった。しかし、 $n = \infty$  の場合と添字に実数全体を使う場合とでは、その特徴は決定的に異なる。 $n = \infty$  の場合は、ベクトルの成分の数は可算無限個であった。添字に実数全体を使う場合は、ベクトルの成分の数は非可算無限個である。

成分の個数が非可算無限個なので

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} \downarrow \\ \leftarrow x_t \\ \downarrow \\ t \end{array}$$

左のように離散的に書くことはできない。右のように、連続的な数直線上のあらゆる位置に対応する成分が存在すると考えることになる。

この  $x_t$  は、 $t$  の値に応じて定まる値であるから、このベクトルのすべての成分の値は、ひとまとめにして関数  $x(t)$  として表される。すなわち

$$\mathbf{x} = x(t)$$

である。

ここに、1つの重要な概念が明らかになった。

**関数はベクトルである。**

関数は、「実数全体を定義域とする関数の集合」という空間上の点を表すベクトルとみなすことができる。

### 関数の内積

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k B_k \quad \longrightarrow \quad \langle A(t), B(t) \rangle = \int_{\text{関数の定義域全体}} A(t) B(t) dt$$

### 関数のノルム

ノルムは、線型代数において、ベクトルの大きさ（長さ）に相当する量。

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= \sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}} & \longrightarrow & \quad \|A(t)\| = \sqrt{\langle A(t), A(t) \rangle} \\ |\mathbf{A}|^2 &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} & \longrightarrow & \quad \|A(t)\|^2 = \langle A(t), A(t) \rangle \end{aligned}$$

## 問題 2

$\omega_0$  を定数とする。  $-\frac{\pi}{\omega_0} \leq t \leq \frac{\pi}{\omega_0}$  を定義域とする可算無限個の関数の組

$$\left\{ \begin{array}{l} f_0(t) = 1 \\ f_1(t) = \cos[\omega_0 t] \quad , \quad f_2(t) = \cos[2\omega_0 t] \quad , \quad f_3(t) = \cos[3\omega_0 t] \quad , \quad \cdots \quad , \\ g_1(t) = \sin[\omega_0 t] \quad , \quad g_2(t) = \sin[2\omega_0 t] \quad , \quad g_3(t) = \sin[3\omega_0 t] \quad , \quad \cdots \end{array} \right\} \quad (1)$$

について考える。

1. これらの関数すべてについて、ノルムを求めよ。
2. この関数の組が直交関数系（どの2つの組み合わせも直交している関数の組、ただしどの関数も0でないノルムを持つ）であることを示せ。



## 問題 2 の答

1.

$$\begin{aligned}\|f_0(t)\| &= \sqrt{\int_{-\frac{\pi}{\omega_0}}^{\frac{\pi}{\omega_0}} (f_0(t))^2 dt} \\ &= \sqrt{\int_{-\frac{\pi}{\omega_0}}^{\frac{\pi}{\omega_0}} dt} \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{\omega_0}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|f_n(t)\| &= \sqrt{\int_{-\frac{\pi}{\omega_0}}^{\frac{\pi}{\omega_0}} (f_n(t))^2 dt} && (n = 1, 2, 3, \dots) \\ &= \sqrt{\int_{-\frac{\pi}{\omega_0}}^{\frac{\pi}{\omega_0}} \cos^2[n\omega_0 t] dt} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{\omega_0}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|g_n(t)\| &= \sqrt{\int_{-\frac{\pi}{\omega_0}}^{\frac{\pi}{\omega_0}} (g_n(t))^2 dt} && (n = 1, 2, 3, \dots) \\ &= \sqrt{\int_{-\frac{\pi}{\omega_0}}^{\frac{\pi}{\omega_0}} \sin^2[n\omega_0 t] dt} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{\omega_0}}\end{aligned}$$

2. どの関数も 0 でないノルムを持つことは前問で示した。

以下、どの 2 つの要素の組み合わせについても内積が 0 であることを示す。

まず

$$\begin{aligned}\langle 1, f_n(t) \rangle &= \int_{-\frac{\pi}{\omega_0}}^{\frac{\pi}{\omega_0}} f_n(t) dt & (n = 1, 2, 3, \dots) \\ &= \int_{-\frac{\pi}{\omega_0}}^{\frac{\pi}{\omega_0}} \cos[n\omega_0 t] dt\end{aligned}$$

これは、被積分関数が  $\frac{2\pi}{\omega_0}$  の  $\frac{1}{\text{整数}}$  倍を周期に持つ三角関数であるから、0 である。

よって、 $n = 1, 2, 3, \dots$  に対して

$$\langle 1, f_n(t) \rangle = 0$$

となることが導かれる。

同様の考察により、 $n = 1, 2, 3, \dots$  に対して

$$\langle 1, g_n(t) \rangle = 0$$

となることも導かれる。

次に

$$\begin{aligned}\langle f_m(t), f_n(t) \rangle &= \int_{-\frac{\pi}{\omega_0}}^{\frac{\pi}{\omega_0}} f_m(t) f_n(t) dt & \begin{pmatrix} m = 1, 2, 3, \dots \\ n = 1, 2, 3, \dots \end{pmatrix} \\ &= \int_{-\frac{\pi}{\omega_0}}^{\frac{\pi}{\omega_0}} \cos[m\omega_0 t] \cos[n\omega_0 t] dt\end{aligned}$$

ここで、三角関数の和と積の変換公式を使えば

$$\begin{aligned}&= \int_{-\frac{\pi}{\omega_0}}^{\frac{\pi}{\omega_0}} \frac{\cos[(m+n)\omega_0 t] + \cos[(m-n)\omega_0 t]}{2} dt \\ &= \frac{1}{2} \left( \int_{-\frac{\pi}{\omega_0}}^{\frac{\pi}{\omega_0}} \cos[(m+n)\omega_0 t] dt + \int_{-\frac{\pi}{\omega_0}}^{\frac{\pi}{\omega_0}} \cos[(m-n)\omega_0 t] dt \right)\end{aligned}$$

ここで、 $m \neq n$  ならば、2 つの積分は、どちらも、被積分関数が  $\frac{2\pi}{\omega_0}$  の  $\frac{1}{\text{整数}}$  倍を周期に持つ三角関数であるから、0 である。すなわち、 $\langle f_m(t), f_n(t) \rangle = 0$ 。

よって、 $m = 1, 2, 3, \dots$  および  $n = 1, 2, 3, \dots$  に対して、 $m \neq n$  ならば

$$\langle f_m(t), f_n(t) \rangle = 0$$

となることが導かれる。

同様の考察により、 $m = 1, 2, 3, \dots$  および  $n = 1, 2, 3, \dots$  に対して、 $m \neq n$  ならば

$$\langle g_m(t), g_n(t) \rangle = 0$$

となることも導かれる。

同様の考察により、 $m = 1, 2, 3, \dots$  および  $n = 1, 2, 3, \dots$  に対して

$$\langle f_m(t), g_n(t) \rangle = 0$$

となることも導かれる。

これで、どの 2 つの要素の組み合わせについても内積が 0 であることが示された。

以上より、関数の組 (1) は直交関数系である。

## 2 Fourier 級数展開

### 2.1 Fourier の主張

周期  $T$  の任意の 周期関数  $f(t)$  は、次のような三角関数の無限級数に展開できる。  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$  として

$$\begin{aligned} f(t) &= C_0 + a_1 \cos[\omega_0 t] + a_2 \cos[2\omega_0 t] + a_3 \cos[3\omega_0 t] + \cdots \\ &\quad + b_1 \sin[\omega_0 t] + b_2 \sin[2\omega_0 t] + b_3 \sin[3\omega_0 t] + \cdots \\ &= C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos[k\omega_0 t] + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin[k\omega_0 t] \end{aligned} \quad (2)$$

## 2.2 Dirichlet の条件

Fourier は、熱伝導の問題について考察する中で上の命題を考えつき、論文で発表しようとした。今日では、(2) 式は、ほとんどの現実的な問題で使えることが知られているが、このときには、Fourier は、証明なしに上の主張をしており、論文は受理されなかった。

解析学の発展により、現在では、(2) 式が成り立つ（級数が  $f(t)$  に収束する）ための条件は、ある程度、解明されている。よく知られているものとして、以下の Dirichlet の条件がある。

1. 有界。
2. 不連続な点が有限個。
3. どの不連続な点に関しても、左極限と右極限の両方が存在し、有限である。

以上 3 つの条件をすべて満たす関数  $f(t)$  では、(2) 式が成り立つ。

なお、2. と 3. の条件を合わせて、区分的に連続であるという。

### 2.3 係数の決定方法

$C_0, a_k, b_k (k = 1, 2, 3, \dots)$  の値を決定するには、関数の組 (1) が直交関数系であることを利用すればよい。

$f(t)$  は直交関数系の要素の線型結合であるから、どれか 1 つの要素との内積をとれば、その要素の成分を残して他の成分がすべて消える。

つまり

$$f(t) = C_0 + a_1 \cos[\omega_0 t] + a_2 \cos[2\omega_0 t] + \dots \\ + b_1 \sin[\omega_0 t] + b_2 \sin[2\omega_0 t] + \dots$$

であるから

$$\begin{aligned} \langle f(t), \cos[\omega_0 t] \rangle &= C_0 \underbrace{\langle 1, \cos[\omega_0 t] \rangle}_0 + a_1 \underbrace{\langle \cos[\omega_0 t], \cos[\omega_0 t] \rangle}_0 + a_2 \underbrace{\langle \cos[2\omega_0 t], \cos[\omega_0 t] \rangle}_0 + \dots \\ &\quad + b_1 \underbrace{\langle \sin[\omega_0 t], \cos[\omega_0 t] \rangle}_0 + b_2 \underbrace{\langle \sin[2\omega_0 t], \cos[\omega_0 t] \rangle}_0 + \dots \\ &= a_1 \|\cos[\omega_0 t]\|^2 \end{aligned}$$

や

$$\begin{aligned} \langle f(t), \sin[2\omega_0 t] \rangle &= C_0 \underbrace{\langle 1, \sin[2\omega_0 t] \rangle}_0 + a_1 \underbrace{\langle \cos[\omega_0 t], \sin[2\omega_0 t] \rangle}_0 + a_2 \underbrace{\langle \cos[2\omega_0 t], \sin[2\omega_0 t] \rangle}_0 + \dots \\ &\quad + b_1 \underbrace{\langle \sin[\omega_0 t], \sin[2\omega_0 t] \rangle}_0 + b_2 \underbrace{\langle \sin[2\omega_0 t], \sin[2\omega_0 t] \rangle}_0 + \dots \\ &= b_2 \|\sin[2\omega_0 t]\|^2 \end{aligned}$$

などより

$$a_1 = \frac{\langle f(t), \cos[\omega_0 t] \rangle}{\|\cos[\omega_0 t]\|^2}$$

や

$$b_2 = \frac{\langle f(t), \sin[2\omega_0 t] \rangle}{\|\sin[2\omega_0 t]\|^2}$$

などのように  $a_n$  と  $b_n$  を決定することができる。

なお、内積を考えると関数の定義域は、1 周期 ぶんの区間とする。たとえば、 $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$  を定義域とする関数として扱えばよい。周期関数であることが前提なので、1 周期 ぶんの区間で定義されれば、その区間の外でも自動的に定義される。

(1) の要素のノルムは **問題 2** で求めた。すなわち

$$\left\| \cos[n\omega_0 t] \right\|^2 = \left\| \sin[n\omega_0 t] \right\|^2 = \frac{T}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

である。よって

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \langle f(t), \cos[n\omega_0 t] \rangle \\ &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos[n\omega_0 t] dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \langle f(t), \sin[n\omega_0 t] \rangle \\ &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin[n\omega_0 t] dt \end{aligned}$$

である。

$C_0$  の決定方法も上の議論に漏れない。すなわち

$$\begin{aligned} \langle f(t), 1 \rangle &= C_0 \langle 1, 1 \rangle + a_1 \underbrace{\langle \cos[\omega_0 t], 1 \rangle}_0 + a_2 \underbrace{\langle \cos[2\omega_0 t], 1 \rangle}_0 + \dots \\ &\quad + b_1 \underbrace{\langle \sin[\omega_0 t], 1 \rangle}_0 + b_2 \underbrace{\langle \sin[2\omega_0 t], 1 \rangle}_0 + \dots \\ &= C_0 \|1\|^2 \end{aligned}$$

より

$$C_0 = \frac{\langle f(t), 1 \rangle}{\|1\|^2}$$

であり

$$\|1\|^2 = T$$

であるから

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{1}{T} \langle f(t), 1 \rangle \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt \end{aligned}$$

である。

## 2.4 Fourier 級数展開

以上の内容を整理してまとめると、次のようになる。

### Fourier 級数展開

有界で区分的に連続な、周期  $T$  の周期関数  $f(t)$  に関して、以下が成り立つ。 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$  として

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos[k\omega_0 t] + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin[k\omega_0 t]$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos[k\omega_0 t] dt \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin[k\omega_0 t] dt \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

これを、 $f(t)$  の **Fourier 級数展開** と呼ぶ。

ここでは、 $C_0$  を  $\frac{a_0}{2}$  とおいたことに注意せよ。このようにおくと

$$\begin{aligned} a_0 &= 2C_0 \\ &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt \end{aligned}$$

であるが、 $\cos 0 = 1$  であることを考慮すると

$$= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos[0\omega_0 t] dt$$

と表せ、 $a_k$  を求める式で  $k = 0$  を代入した場合に等しいことがわかる。つまり、こうすることで、 $a_0$  を求める式が  $a_k$  を求める式に含まれることになり、区別して表す必要がなくなる。

ここに現れる  $a_0, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$  を **Fourier 係数** と呼ぶ。



## 問題 3

以下の関数を Fourier 級数展開せよ。

$$1. f(t) = \begin{cases} f(t+2\pi) & (t < -\pi) \\ 0 & (-\pi \leq t < 0) \\ 1 & (0 \leq t < \pi) \\ f(t-2\pi) & (\pi \leq t) \end{cases}$$

$$2. f(t) = \begin{cases} f(t+2\pi) & (t < -\pi) \\ t & (-\pi \leq t < \pi) \\ f(t-2\pi) & (\pi \leq t) \end{cases}$$

$$3. f(t) = \begin{cases} f(t+2\pi) & (t < -\pi) \\ \frac{2}{\pi^4} t^4 - \frac{4}{\pi^2} t^2 + 1 & (-\pi \leq t < \pi) \\ f(t-2\pi) & (\pi \leq t) \end{cases}$$



## 問題 3 の答

1. 周期  $T$  は  $2\pi$  である。

Fourier 係数  $a_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ),  $b_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) を求める。

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt \\ &= \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \pi \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{2}{T} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos[\omega_0 t] dt \\ &= \frac{2}{T} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos\left[\frac{2\pi}{T} t\right] dt \\ &= \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos\left[\frac{2\pi}{2\pi} t\right] dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos t dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos t dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos[2t] dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

同様に考えると、 $n = 1, 2, 3, \dots$  に対して  $a_n = 0$ 。

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin t dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin t dt \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_2 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin[2t] dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_3 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin[3t] dt \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{2}{3} \end{aligned}$$

同様に考えると、 $n = 1, 2, 3, \dots$  に対して、 $b_n = \begin{cases} \frac{2}{n\pi} & (n = \text{奇数}) \\ 0 & (n = \text{偶数}) \end{cases}$ 。

以上より

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left( \sin t + \frac{1}{3} \sin[3t] + \frac{1}{5} \sin[5t] + \frac{1}{7} \sin[7t] + \dots \right)$$

であることがわかる。

2. 周期  $T$  は  $2\pi$  である。

Fourier 係数  $a_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ),  $b_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) を求める。

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \, dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \cos t \, dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \cos[2t] \, dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

同様に考えると、 $n = 1, 2, 3, \dots$  に対して  $a_n = 0$ 。

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin t \, dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \left[ -t \cos t \right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \cos t \, dt \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot 2\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_2 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin[2t] \, dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \left[ -\frac{1}{2} t \cos[2t] \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos[2t] \, dt \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) \cdot 2\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_3 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin[3t] \, dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \left[ -\frac{1}{3} t \cos[3t] \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{3} \int_{-\pi}^{\pi} \cos[3t] \, dt \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2\pi \end{aligned}$$

同様に考えると、 $n = 1, 2, 3, \dots$  に対して、 $b_n = \begin{cases} \frac{2}{n} & (n = \text{奇数}) \\ -\frac{2}{n} & (n = \text{偶数}) \end{cases}$ 。

以上より

$$f(t) = 2 \left( \sin t - \frac{1}{2} \sin[2t] + \frac{1}{3} \sin[3t] - \frac{1}{4} \sin[4t] + \dots \right)$$

であることがわかる。

3. 周期  $T$  は  $2\pi$  である。

Fourier 係数  $a_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ),  $b_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) を求める。

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{2}{\pi^4} t^4 - \frac{4}{\pi^2} t^2 + 1 \right) dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \left( \frac{2}{\pi^4} \int_{-\pi}^{\pi} t^4 dt - \frac{4}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt + \int_{-\pi}^{\pi} dt \right) \\
 &= \frac{1}{\pi} \left( \frac{2}{\pi^4} \cdot \frac{2\pi^5}{5} - \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{2\pi^3}{3} + 2\pi \right) \\
 &= \frac{2}{15}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{2}{\pi^4} t^4 - \frac{4}{\pi^2} t^2 + 1 \right) \cos t dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \left( \frac{2}{\pi^4} \int_{-\pi}^{\pi} t^4 \cos t dt - \frac{4}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos t dt + \int_{-\pi}^{\pi} \cos t dt \right) \\
 &= \frac{1}{\pi} \left( \frac{2}{\pi^4} \left( [t^4 \sin t]_{-\pi}^{\pi} - 4 \int_{-\pi}^{\pi} t^3 \sin t dt \right) - \frac{4}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos t dt + \int_{-\pi}^{\pi} \cos t dt \right) \\
 &= \frac{1}{\pi} \left( -\frac{8}{\pi^4} \int_{-\pi}^{\pi} t^3 \sin t dt - \frac{4}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos t dt + \int_{-\pi}^{\pi} \cos t dt \right) \\
 &= \frac{1}{\pi} \left( -\frac{8}{\pi^4} \left( [-t^3 \cos t]_{-\pi}^{\pi} + 3 \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos t dt \right) - \frac{4}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos t dt + \int_{-\pi}^{\pi} \cos t dt \right) \\
 &= \frac{1}{\pi} \left( -\frac{16}{\pi} - \frac{24}{\pi^4} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos t dt - \frac{4}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos t dt + \int_{-\pi}^{\pi} \cos t dt \right) \\
 &= \frac{1}{\pi} \left( -\frac{16}{\pi} - \left( \frac{24}{\pi^4} + \frac{4}{\pi^2} \right) \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos t dt + \int_{-\pi}^{\pi} \cos t dt \right) \\
 &= \frac{1}{\pi} \left( -\frac{16}{\pi} - \left( \frac{24}{\pi^4} + \frac{4}{\pi^2} \right) \left( [t^2 \sin t]_{-\pi}^{\pi} - 2 \int_{-\pi}^{\pi} t \sin t dt \right) + \int_{-\pi}^{\pi} \cos t dt \right) \\
 &= \frac{1}{\pi} \left( -\frac{16}{\pi} + \left( \frac{48}{\pi^4} + \frac{8}{\pi^2} \right) \int_{-\pi}^{\pi} t \sin t dt + \int_{-\pi}^{\pi} \cos t dt \right) \\
 &= \frac{1}{\pi} \left( -\frac{16}{\pi} + \left( \frac{48}{\pi^4} + \frac{8}{\pi^2} \right) \left( [-t \cos t]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \cos t dt \right) + \int_{-\pi}^{\pi} \cos t dt \right) \\
 &= \frac{1}{\pi} \left( -\frac{16}{\pi} + \left( \frac{96}{\pi^3} + \frac{16}{\pi} \right) + \left( \frac{48}{\pi^4} + \frac{8}{\pi^2} \right) \int_{-\pi}^{\pi} \cos t dt + \int_{-\pi}^{\pi} \cos t dt \right) \\
 &= \frac{1}{\pi} \left( \frac{96}{\pi^3} + \left( \frac{48}{\pi^4} + \frac{8}{\pi^2} + 1 \right) \int_{-\pi}^{\pi} \cos t dt \right) \\
 &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{96}{\pi^3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_2 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{2}{\pi^4} t^4 - \frac{4}{\pi^2} t^2 + 1 \right) \cos[2t] dt \\
&= \frac{1}{\pi} \left( \frac{2}{\pi^4} \int_{-\pi}^{\pi} t^4 \cos[2t] dt - \frac{4}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos[2t] dt + \int_{-\pi}^{\pi} \cos[2t] dt \right) \\
&= \frac{1}{\pi} \left( \frac{2}{\pi^4} \left( \left[ \frac{1}{2} t^4 \sin[2t] \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2} \cdot 4 \int_{-\pi}^{\pi} t^3 \sin[2t] dt \right) - \frac{4}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos[2t] dt + \int_{-\pi}^{\pi} \cos[2t] dt \right) \\
&= \frac{1}{\pi} \left( -\frac{4}{\pi^4} \int_{-\pi}^{\pi} t^3 \sin[2t] dt - \frac{4}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos[2t] dt + \int_{-\pi}^{\pi} \cos[2t] dt \right) \\
&= \frac{1}{\pi} \left( -\frac{4}{\pi^4} \left( \left[ -\frac{1}{2} t^3 \cos[2t] \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2} \cdot 3 \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos[2t] dt \right) - \frac{4}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos[2t] dt + \int_{-\pi}^{\pi} \cos[2t] dt \right) \\
&= \frac{1}{\pi} \left( \frac{4}{\pi} - \frac{6}{\pi^4} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos[2t] dt - \frac{4}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos[2t] dt + \int_{-\pi}^{\pi} \cos[2t] dt \right) \\
&= \frac{1}{\pi} \left( \frac{4}{\pi} - \left( \frac{6}{\pi^4} + \frac{4}{\pi^2} \right) \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos[2t] dt + \int_{-\pi}^{\pi} \cos[2t] dt \right) \\
&= \frac{1}{\pi} \left( \frac{4}{\pi} - \left( \frac{6}{\pi^4} + \frac{4}{\pi^2} \right) \left( \left[ \frac{1}{2} t^2 \sin[2t] \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2} \cdot 2 \int_{-\pi}^{\pi} t \sin[2t] dt \right) + \int_{-\pi}^{\pi} \cos[2t] dt \right) \\
&= \frac{1}{\pi} \left( \frac{4}{\pi} + \left( \frac{6}{\pi^4} + \frac{4}{\pi^2} \right) \int_{-\pi}^{\pi} t \sin[2t] dt + \int_{-\pi}^{\pi} \cos[2t] dt \right) \\
&= \frac{1}{\pi} \left( \frac{4}{\pi} + \left( \frac{6}{\pi^4} + \frac{4}{\pi^2} \right) \left( \left[ -\frac{1}{2} t \cos[2t] \right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \cos[2t] dt \right) + \int_{-\pi}^{\pi} \cos[2t] dt \right) \\
&= \frac{1}{\pi} \left( \frac{4}{\pi} - \left( \frac{6}{\pi^3} + \frac{4}{\pi} \right) + \left( \frac{6}{\pi^4} + \frac{4}{\pi^2} \right) \int_{-\pi}^{\pi} \cos[2t] dt + \int_{-\pi}^{\pi} \cos[2t] dt \right) \\
&= \frac{1}{\pi} \left( -\frac{6}{\pi^3} + \left( \frac{6}{\pi^4} + \frac{4}{\pi^2} + 1 \right) \int_{-\pi}^{\pi} \cos[2t] dt \right) \\
&= \frac{1}{\pi} \cdot \left( -\frac{6}{\pi^3} \right)
\end{aligned}$$

同様に考えると、 $n = 1, 2, 3, \dots$  に対して、 $a_n = \begin{cases} \frac{96}{n^4 \pi^4} & (n = \text{奇数}) \\ -\frac{96}{n^4 \pi^4} & (n = \text{偶数}) \end{cases}$ 。

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{2}{\pi^4} t^4 - \frac{4}{\pi^2} t^2 + 1 \right) \sin t dt \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_2 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{2}{\pi^4} t^4 - \frac{4}{\pi^2} t^2 + 1 \right) \sin[2t] dt \\
&= 0
\end{aligned}$$

同様に考えると、 $n = 1, 2, 3, \dots$  に対して、 $b_n = 0$ 。

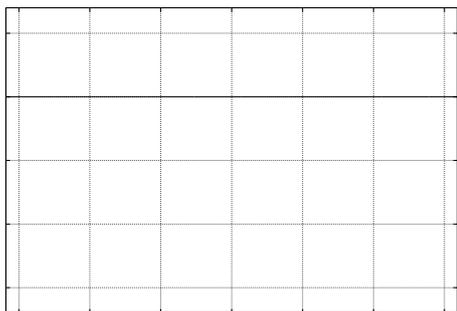
以上より

$$f(t) = \frac{1}{15} + \frac{96}{\pi^4} \left( \cos t - \frac{1}{16} \cos[2t] + \frac{1}{81} \cos[3t] - \frac{1}{256} \cos[4t] + \dots \right)$$

であることがわかる。

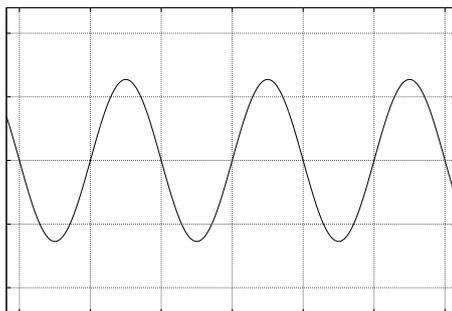
$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left( \sin t + \frac{1}{3} \sin[3t] + \frac{1}{5} \sin[5t] + \frac{1}{7} \sin[7t] + \dots \right)$$

定数項

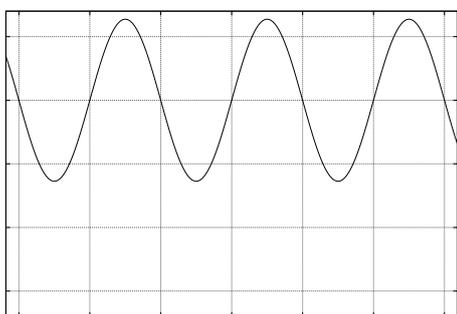


+

基本振動

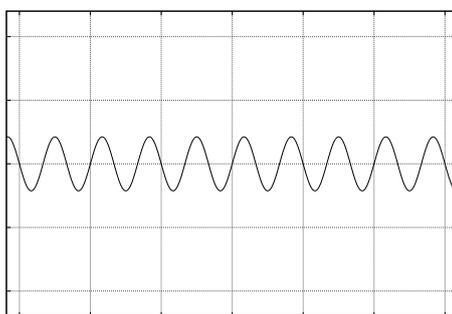


定数項  
+  
基本振動

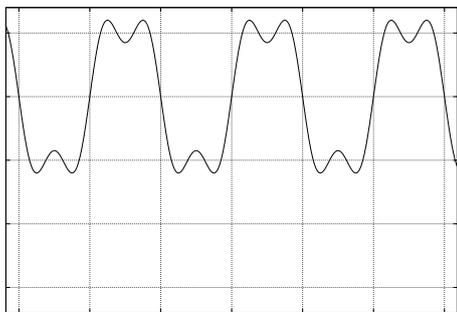


+

3 倍振動

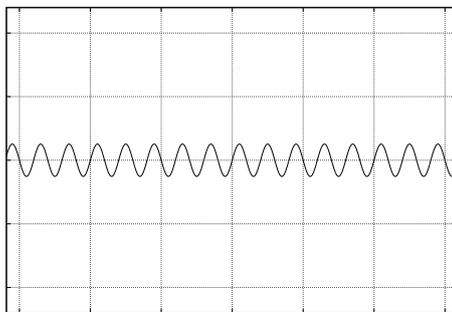


3 倍振動まで

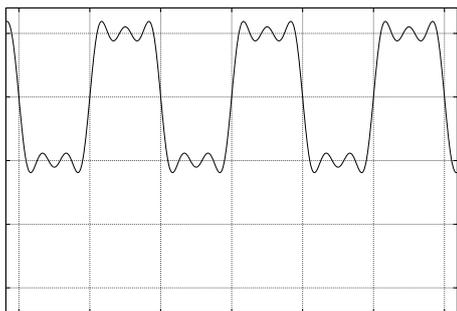


+

5 倍振動

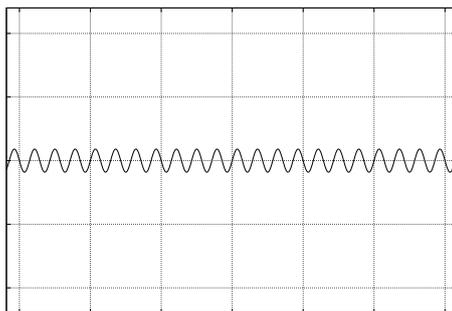


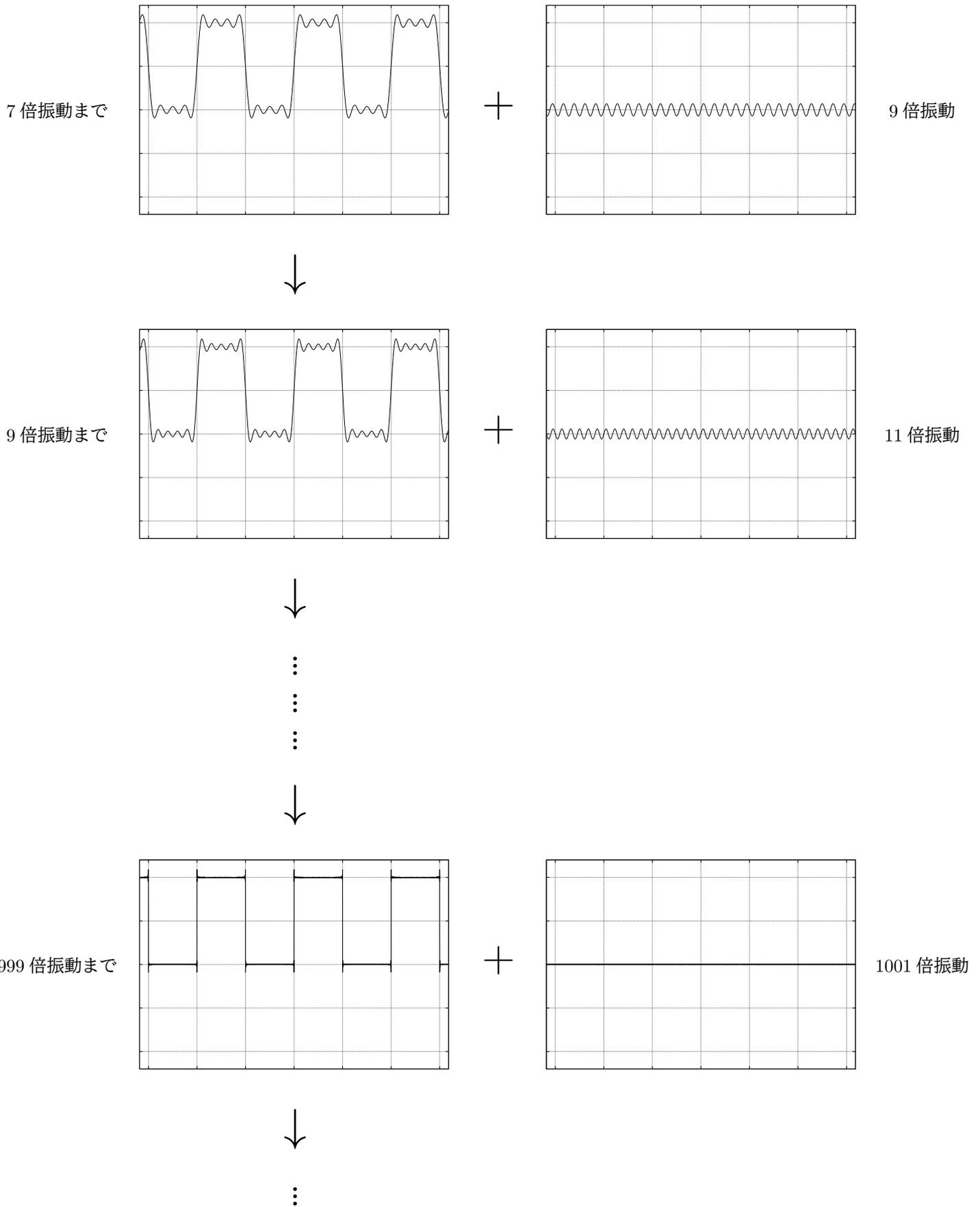
5 倍振動まで



+

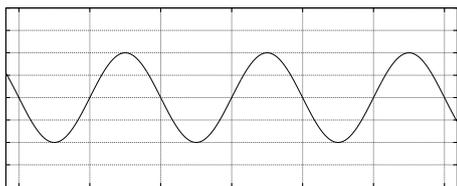
7 倍振動



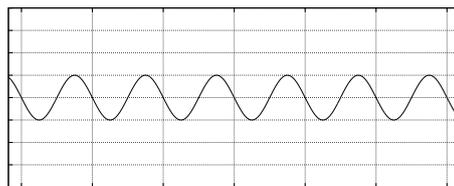


$$f(t) = 2 \left( \sin t - \frac{1}{2} \sin[2t] + \frac{1}{3} \sin[3t] - \frac{1}{4} \sin[4t] + \dots \right)$$

基本振動



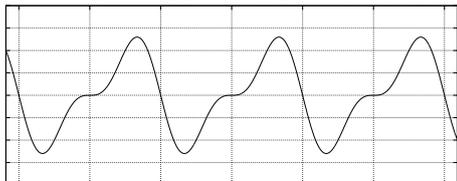
+



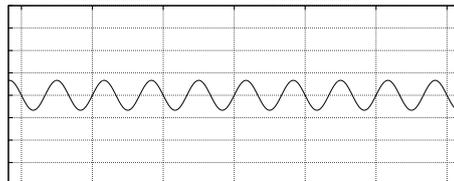
2 倍振動



2 倍振動まで



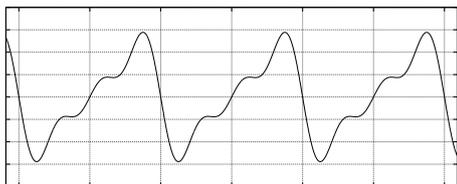
+



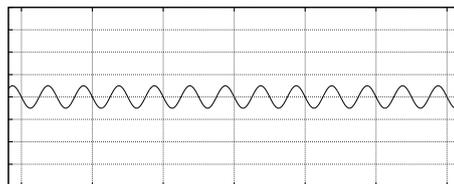
3 倍振動



3 倍振動まで



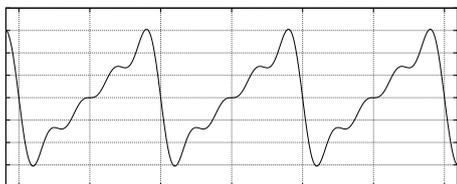
+



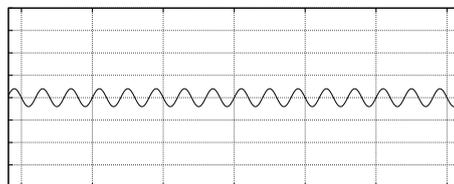
4 倍振動



4 倍振動まで



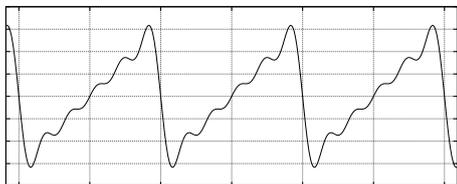
+



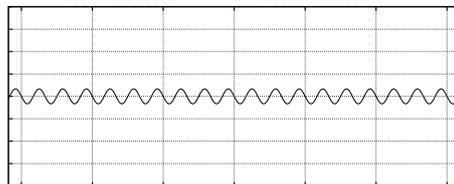
5 倍振動



5 倍振動まで



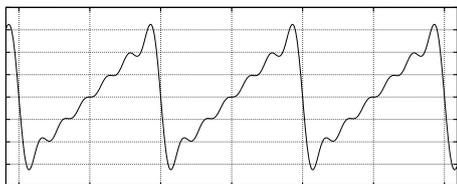
+



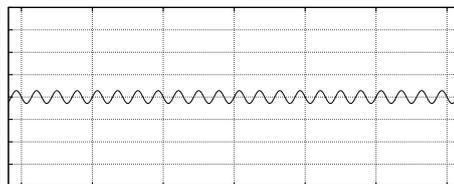
6 倍振動



6 倍振動まで

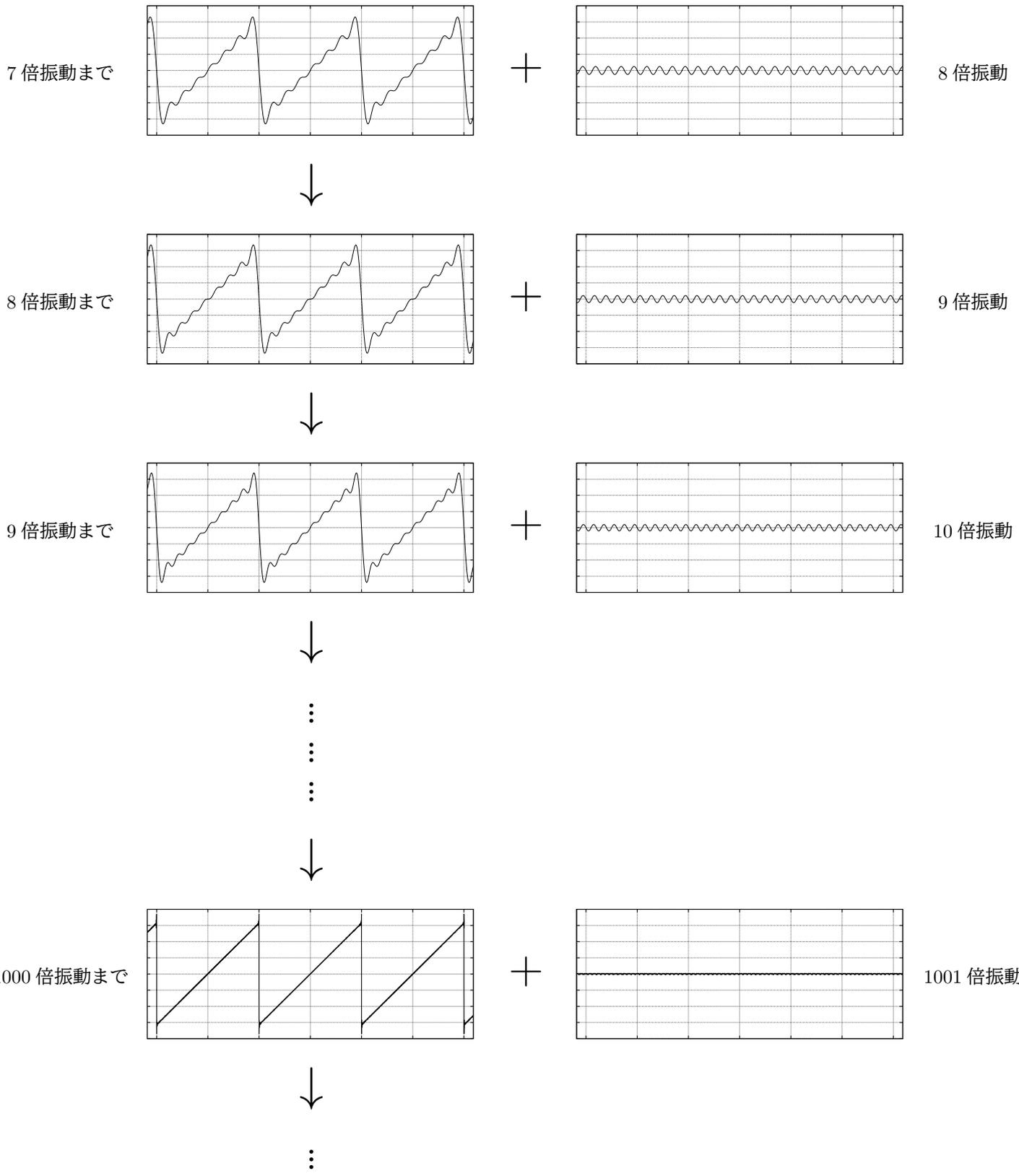


+



7 倍振動





## 2.5 Fourier 級数展開のいろいろな表現

### 振幅と位相による表現

周期  $T$  の周期関数  $f(t)$  を

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos[k\omega_0 t + \phi_k]$$

または

$$f(t) = \frac{B_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin[k\omega_0 t + \psi_k]$$

と表すことができる。ただし、 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ 。

この表現に現れる  $A_k, B_k, \phi_k, \psi_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) と  $f(t)$  の Fourier 係数  $a_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ),  $b_k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) との間には、以下の関係がある。

$$\begin{aligned} A_0 &= a_0 \\ A_k &= \sqrt{a_k^2 + b_k^2} && (k = 1, 2, 3, \dots) \\ \left\{ \begin{array}{l} \cos \phi_k = \frac{a_k}{A_k} \\ \sin \phi_k = -\frac{b_k}{A_k} \end{array} \right\} &&& (k = 1, 2, 3, \dots) \\ B_0 &= a_0 \\ B_k &= \sqrt{a_k^2 + b_k^2} && (k = 1, 2, 3, \dots) \\ \left\{ \begin{array}{l} \cos \psi_k = \frac{b_k}{B_k} \\ \sin \psi_k = \frac{a_k}{B_k} \end{array} \right\} &&& (k = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

この表現は、次のように解釈できる。

任意の振動  $f(t)$  は、角振動数  $\omega_0$  の基本振動、角振動数  $2\omega_0$  の2倍振動、角振動数  $3\omega_0$  の3倍振動、... といった固有振動を、振幅と位相をそれぞれ変えて重ねあわせたものである。その中の  $k$  倍振動 ( $k \geq 1$ ) の成分の、振幅が  $A_k$  または  $B_k$ 、位相が  $\phi_k$  または  $\psi_k$  である。また、 $f(t)$  に含まれる直流成分 (の2倍) が、 $A_0$  または  $B_0$  である。

この表現は、複雑な波の中にどの振動数の成分がどれだけの強さで含まれているかを調べる、スペクトル分析において、便利である。

**複素 Fourier 級数展開**

周期  $T$  の周期関数  $f(t)$  を

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp[i k \omega_0 t]$$

と表すことができる。ただし、 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ 、 $i$  は虚数単位。これを複素 Fourier 級数展開という。

複素 Fourier 級数展開に現れる  $c_k$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) (複素 Fourier 係数) は

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \exp[-i k \omega_0 t] dt \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

で決定することができる。

$f(t)$  の複素 Fourier 係数  $c_k$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) と Fourier 係数  $a_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ )、 $b_k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) との間には、以下の関係がある。

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{a_0}{2} \\ c_k &= \frac{a_k - i b_k}{2} & (k = 1, 2, 3, \dots) \\ c_k &= \frac{a_{-k} + i b_{-k}}{2} & (k = -1, -2, -3, \dots) \\ a_0 &= 2c_0 \\ a_k &= c_{-k} + c_k & (k = 1, 2, 3, \dots) \\ b_k &= \frac{c_{-k} - c_k}{i} = i(c_k - c_{-k}) & (k = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

複素 Fourier 級数展開は、次のような着想から導き出される。

Euler の関係式

$$\exp[i\theta] = \cos\theta + i \sin\theta$$

を考慮すると

$$\begin{aligned} \cos[k\omega_0 t] &= \frac{1}{2} \left( \exp[i k \omega_0 t] + \exp[-i k \omega_0 t] \right) \\ \sin[k\omega_0 t] &= \frac{1}{2i} \left( \exp[i k \omega_0 t] - \exp[-i k \omega_0 t] \right) \end{aligned}$$

であるから、 $f(t)$  を Fourier 級数展開し、 $\cos[k\omega_0 t]$  と  $\sin[k\omega_0 t]$  にこれを代入すれば、 $f(t)$  を指数関数  $\exp[i\omega_0 t]$  と  $\exp[-i\omega_0 t]$  の無限級数として表す表現が得られる。それが、複素 Fourier 級数展開である。

三角関数も指数関数も単振動を表す関数であるが、指数関数の方が便利である。それは、関数の積、微分、積分を計算する際の処理がより単純だからである。

## 問題 4

関数  $f(t)$  の Fourier 級数展開を

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos[k\omega_0 t] + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin[k\omega_0 t]$$

とする。

1.  $f(t)$  を

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos[k\omega_0 t + \phi_k]$$

と表した場合の  $A_k$  と  $\phi_k$  を、 $a_k$  と  $b_k$  を使って表せ。

2.  $f(t)$  を

$$f(t) = \frac{B_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin[k\omega_0 t + \psi_k]$$

と表した場合の  $B_k$  と  $\psi_k$  を、 $a_k$  と  $b_k$  を使って表せ。

## 問題 4 の答

1.

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos[k\omega_0 t] + b_k \sin[k\omega_0 t])$$

である。三角関数の合成公式を使うと

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos[k\omega_0 t + \phi_k]$$

$$\text{ただし、 } k = 1, 2, 3, \dots \text{ に対して } A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos \phi_k = \frac{a_k}{A_k} \\ \sin \phi_k = -\frac{b_k}{A_k} \end{array} \right\}$$

となる。これで、 $k = 1, 2, 3, \dots$  に対する  $A_k$  と  $\phi_k$  を  $a_k$  と  $b_k$  で表せた。

また、明らかに

$$A_0 = a_0$$

である。これで、 $A_0$  を  $a_0$  で表せた。

2.

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos[k\omega_0 t] + b_k \sin[k\omega_0 t])$$

である。三角関数の合成公式を使うと

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin[k\omega_0 t + \psi_k]$$

$$\text{ただし、 } k = 1, 2, 3, \dots \text{ に対して } B_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos \psi_k = \frac{b_k}{B_k} \\ \sin \psi_k = \frac{a_k}{B_k} \end{array} \right\}$$

となる。これで、 $k = 1, 2, 3, \dots$  に対する  $B_k$  と  $\psi_k$  を  $a_k$  と  $b_k$  で表せた。

また、明らかに

$$B_0 = a_0$$

である。これで、 $B_0$  を  $a_0$  で表せた。

## 問題 5

関数  $f(t)$  の Fourier 級数展開を

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos[k\omega_0 t] + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin[k\omega_0 t]$$

とする。

虚数単位を  $i$  として、 $f(t)$  を

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp[i k \omega_0 t]$$

と表した場合の  $c_k$  を、 $\{a_k\}$  と  $\{b_k\}$  を使って表せ。

## 問題 5 の答

Euler の関係式は

$$\exp[i\theta] = \cos\theta + i\sin\theta$$

である。これより

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{1}{2}(\exp[i\theta] + \exp[-i\theta]) \\ \sin\theta &= \frac{1}{2i}(\exp[i\theta] - \exp[-i\theta])\end{aligned}$$

が成り立つ。

よって

$$\begin{aligned}f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos[k\omega_0 t] + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin[k\omega_0 t] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2} (\exp[ik\omega_0 t] + \exp[-ik\omega_0 t]) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{2i} (\exp[ik\omega_0 t] - \exp[-ik\omega_0 t]) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k}{2} + \frac{b_k}{2i}\right) \exp[ik\omega_0 t] + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k}{2} - \frac{b_k}{2i}\right) \exp[-ik\omega_0 t] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k - ib_k}{2} \exp[ik\omega_0 t] + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k + ib_k}{2} \exp[-ik\omega_0 t] \\ &= \frac{a_0}{2} \exp[i \cdot 0 \omega_0 t] + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k - ib_k}{2} \exp[ik\omega_0 t] + \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{a_{-k} + ib_{-k}}{2} \exp[ik\omega_0 t]\end{aligned}$$

と書ける。

これと

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp[ik\omega_0 t]$$

を比較すれば

$$\begin{aligned}c_0 &= \frac{a_0}{2} \\ c_k &= \frac{a_k - ib_k}{2} && (k = 1, 2, 3, \dots) \\ c_k &= \frac{a_{-k} + ib_{-k}}{2} && (k = -1, -2, -3, \dots)\end{aligned}$$

であることがわかる。これで、 $c_k$  を  $\{a_k\}$  と  $\{b_k\}$  で表せた。

## 問題 6

虚数単位を  $i$  として、関数  $f(t)$  を

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp[i k \omega_0 t]$$

と表す場合の  $c_k$  を決定する公式を導け。

## 問題 6 の答

$f(t)$  の Fourier 係数を  $a_k$  ( $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ ) および  $b_k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) とし、問題 5 の結論を利用する。  
 まず、 $k = 1, 2, 3, \dots$  に対する  $c_k$  は

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{a_k - i b_k}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos[k\omega_0 t] dt - i \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin[k\omega_0 t] dt \right) \\ &= \frac{1}{T} \left( \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos[k\omega_0 t] dt - i \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin[k\omega_0 t] dt \right) \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) (\cos[k\omega_0 t] - i \sin[k\omega_0 t]) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \exp[-i k \omega_0 t] dt \end{aligned}$$

である。

次に、 $k = -1, -2, -3, \dots$  に対する  $c_k$  は

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{a_{-k} + i b_{-k}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos[-k\omega_0 t] dt + i \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin[-k\omega_0 t] dt \right) \\ &= \frac{1}{T} \left( \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos[-k\omega_0 t] dt + i \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin[-k\omega_0 t] dt \right) \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) (\cos[-k\omega_0 t] + i \sin[-k\omega_0 t]) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \exp[i(-k\omega_0 t)] dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \exp[-i k \omega_0 t] dt \end{aligned}$$

である。

最後に、 $c_0$  は

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{a_0}{2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \exp[-i \cdot 0 \omega_0 t] dt \end{aligned}$$

である。

以上を合わせると、 $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  に対して成り立つ

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \exp[-i k \omega_0 t] dt$$

という公式を導くことができる。

## 問題 7

関数  $f(t)$  の複素 Fourier 級数展開を

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp[i k \omega_0 t]$$

とする。

1.  $f(t)$  を

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos[k \omega_0 t + \phi_k]$$

と表した場合の  $A_k$  と  $\phi_k$  を、 $c_k$  を使って表せ。

2.  $f(t)$  を

$$f(t) = \frac{B_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin[k \omega_0 t + \psi_k]$$

と表した場合の  $B_k$  と  $\psi_k$  を、 $c_k$  を使って表せ。



## 問題 7 の答

$f(t)$  の Fourier 係数を  $a_k$  ( $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ ) および  $b_k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) とし、問題 4 と 問題 5 の結論を利用する。  
問題 5 の結論から

$$a_0 = 2c_0$$

および、 $k = 1, 2, 3, \dots$  に対して

$$\begin{aligned} a_k &= c_{-k} + c_k \\ b_k &= \frac{c_{-k} - c_k}{i} = i(c_k - c_{-k}) \end{aligned}$$

であることがわかるので、これを使うと、問題 4 の結論より

$$\begin{aligned} A_0 = B_0 &= a_0 \\ &= 2c_0 \end{aligned}$$

および、 $k = 1, 2, 3, \dots$  に対して

$$\begin{aligned} A_k = B_k &= \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \\ &= \sqrt{(c_{-k} + c_k)^2 + i^2(c_k - c_{-k})^2} \\ &= \sqrt{(c_{-k} + c_k)^2 - (c_k - c_{-k})^2} \\ &= \sqrt{4c_{-k}c_k} \\ &= 2\sqrt{c_{-k}c_k} \end{aligned}$$

が導かれる。ここで、問題 6 の結論にも注意する。すると、 $c_{-k} = \overline{c_k}$  であることがわかるので、この式は

$$\begin{aligned} A_k = B_k &= 2\sqrt{\overline{c_k}c_k} \\ &= 2\sqrt{|c_k|^2} \\ &= 2|c_k| \end{aligned}$$

となる。 $c_0$  が実数であることに注意すると、 $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  に対して、まとめて

$$A_k = B_k = 2|c_k|$$

と表すことができる。これで、 $A_k$  と  $B_k$  を  $c_k$  を使って表せた。

また、ふたたび **問題 4** の結論と **問題 5** の結論より

$$\begin{aligned}\cos \phi_k &= \frac{a_k}{A_k} \\ &= \frac{c_{-k} + c_k}{2|c_k|} \\ \sin \phi_k &= -\frac{b_k}{A_k} \\ &= -\frac{i(c_k - c_{-k})}{2|c_k|}\end{aligned}$$

が導かれる。ここで、ふたたび **問題 6** の結論に注意すると

$$\begin{aligned}\cos \phi_k &= \frac{\overline{c_k} + c_k}{2|c_k|} \\ &= \frac{2 \operatorname{Re}[c_k]}{2|c_k|} \\ &= \frac{\operatorname{Re}[c_k]}{|c_k|} \\ \sin \phi_k &= -\frac{i(c_k - \overline{c_k})}{2|c_k|} \\ &= -\frac{i \cdot 2i \operatorname{Im}[c_k]}{2|c_k|} \\ &= \frac{\operatorname{Im}[c_k]}{|c_k|}\end{aligned}$$

が得られる。

これより、 $|c_k| \cos \phi_k$  と  $|c_k| \sin \phi_k$  が、同じ複素数  $c_k$  のそれぞれ実部と虚部になっていることがわかる。つまり

$$|c_k|(\cos \phi_k + i \sin \phi_k) = c_k$$

すなわち

$$\cos \phi_k + i \sin \phi_k = \frac{c_k}{|c_k|}$$

である。この式の左辺は、Euler の関係式により  $\exp[i\phi_k]$  に等しい。したがって、結局

$$\exp[i\phi_k] = \frac{c_k}{|c_k|}$$

と表すことができる。これで、 $\phi_k$  を  $c_k$  を使って表せた。

同様の考察により

$$\begin{aligned}\cos \psi_k &= -\frac{\operatorname{Im}[c_k]}{|c_k|} \\ \sin \psi_k &= \frac{\operatorname{Re}[c_k]}{|c_k|}\end{aligned}$$

が得られる。

これより、 $|c_k| \sin \psi_k$  と  $-|c_k| \cos \psi_k$  が、同じ複素数  $c_k$  のそれぞれ実部と虚部になっていることがわかる。つまり

$$|c_k|(\sin \psi_k - i \cos \psi_k) = c_k$$

すなわち

$$-i(\cos \psi_k + i \sin \psi_k) = \frac{c_k}{|c_k|}$$

である。この式の左辺は、Euler の関係式により  $-i \exp[i\psi_k]$  に等しい。したがって、結局

$$\begin{aligned}-i \exp[i\psi_k] &= \frac{c_k}{|c_k|} \\ \exp\left[-i\frac{\pi}{2}\right] \exp[i\psi_k] &= \frac{c_k}{|c_k|} \\ \exp\left[i\left(\psi_k - \frac{\pi}{2}\right)\right] &= \frac{c_k}{|c_k|}\end{aligned}$$

と表すことができる。これで、 $\psi_k$  を  $c_k$  を使って表せた。

## 2.6 Fourier 級数展開の物理的意味

Fourier 級数展開が成り立つという事実が持つ物理的意味は大きい。

任意の周期関数が三角関数の和で表されるということは、任意の振動あるいは波が、単振動あるいは正弦波の重ねあわせで作られるということである。つまり、単振動・正弦波以外のすべての振動・波動の性質は、単振動・正弦波の性質から導けるということである。

そのとき重ね合わせるのは、Fourier 級数展開によれば、角振動数が  $\omega_0$  の 1 倍、2 倍、3 倍、 $\dots$  のものである。すなわち、基本振動、2 倍振動、3 倍振動、 $\dots$  という固有振動の組であり、物体のあらゆる振動が固有振動の組み合わせでしかないことをも意味している。

ギターやヴァイオリン、木管楽器や金管楽器、人それぞれに違う声、すべて音色が違う。物体の振動の様子は多様で複雑であり、単純な法則で理解するなど到底できそうにないと思ってしまう。しかし、実は、どれも同じように、単振動、正弦波、固有振動の重ね合わせでしかない。だから、私たちは、単振動・正弦波・固有振動に関する知識を使って、このような複雑な振動の性質を理解できる。

そのように考えると、Fourier 級数展開の発見の意義は、「関数の組 (1) がある関数空間の直交基底であること」そして「自然界の周期関数のほとんどがその空間に含まれること」に人類が気づいた点にある、と言えるかもしれない。

## 2.7 Fourier の熱伝導の問題

問題 8 は、Fourier が Fourier 級数展開を発見するきっかけとなった、「Fourier の熱伝導の問題」である。問題 8 の答では、Fourier が論文で述べた解の導出方法にほぼ忠実になるよう、考え方を示した。

これは Fourier 級数展開を利用して解を求める例ではないが、Fourier 級数展開への着想を得る過程を理解することができ、興味深い。

Fourier はこの導出の後、問題を一般化して、熱源の温度が  $x$  の関数  $f(x)$  である場合についての考察に進む。そのとき、解くべき偏微分方程式 ((5) 式) と「 $u = 0$  条件」 ((7) 式、(8) 式、(9) 式) が変わらないので、基本解は、 $f(x)$  によらず、必ず (12) 式の形になることが導き出されてしまう。すると、問題 8 の設問 6. と同様の議論により、どんな  $f(x)$  に対しても、(14) 式の右辺を  $f(x)$  に置き換えた関係式が成り立つことになる。

その関係式が「どのような  $f(x)$  も三角関数の無限級数で表せるのではないか?」という着想を喚起したであろうことは想像に難くない。論文の後の部分で、Fourier は、幅  $\pi$  の定義域を持つ関数を  $\sum_k \sin[kx]$  という級数に展開できること、同じ関数を  $\sum_k \cos[kx]$  という級数に展開できること、を論じ、最後に、幅  $2\pi$  の定義域を持つ関数を  $\sum_k \sin[kx] + \sum_k \cos[kx]$  という級数に展開できることを述べている。

Fourier のこの論文は、「 $f(x)$  がどのような関数であっても」展開できるということの証明を欠いていたので、雑誌への掲載を認められなかった。しかし、数学的に厳密な証明をせずとも、物理現象との対応からほとんどの場合に成り立つであろうことを確信し、力強く主張した Fourier は、むしろ、物理的な本質を直感的に見抜くことのできる、優れた物理学者だったと言えよう。

## 問題 8

2次元空間における熱伝導について考える。空間内に、互いに直交する  $x$  軸と  $y$  軸をとる。

幅  $\pi$  で長さが半無限の板を、長さ方向の2つの辺が  $x = \pm \frac{\pi}{2}$  の位置で  $y$  軸に平行に、幅方向の辺が  $y = 0$  の位置で  $x$  軸に平行になるように、 $y \geq 0$  の領域に置く。

板の周囲の温度は 0 に保たれている。

この状態で、板の幅方向の辺を熱源に接触させる。熱源は、温度が 1 に保たれている。

以上の条件のもと、板の定常状態での温度分布を求めたい。

問題の状況について考える前に、まず、一般の場合を考え、熱伝導に関する基本的な方程式を導く。

1. 空間が一様な物質で満たされている状況を考える。時刻  $t$  における位置  $\mathbf{r}$  の温度を  $u(\mathbf{r}, t)$  とする。物質の熱伝導率を  $\kappa$ 、単位体積あたりの熱容量を  $C$  とし、どちらも定数とする。

Fourier の法則が成り立つことを仮定して、 $u(\mathbf{r}, t)$  が満たす偏微分方程式を導け。

次に、問題の状況について考える。

2. 定常状態における、板の内部の座標  $(x, y)$  の位置の温度を  $u(x, y)$  とする。 $u(x, y)$  が満たす偏微分方程式を書け。
3.  $u(x, y)$  が満たす境界条件を書け。
4. 設問 2. で得た偏微分方程式の基本解は、 $X(x)$  と  $Y(y)$  を 1 変数関数として  $u(x, y) = X(x)Y(y)$  とおくことにより見つけられることが知られている。この知識を利用して得られる  $u(x, y)$  の基本解をすべて求めよ。境界条件は考慮しない。

設問 2. で得た偏微分方程式の一般解は、設問 4. で得たすべての基本解に任意の定数をかけて足したもの（基本解の線型結合）である。その一般解のうち、設問 3. で得た境界条件を満たす特殊解が、問題の答である。

設問 3. で得た境界条件のうち、 $u = 0$  の形のものを「 $u = 0$  条件」、他のものを「 $u \neq 0$  条件」と呼ぶことにする。

5. 基本解のうち「 $u = 0$  条件」を満たすものだけの線型結合は、やはり「 $u = 0$  条件」を満たす。

設問 4. で得た基本解から「 $u = 0$  条件」を満たすものを選ぶよう、基本解に含まれる任意定数の値を絞り込め。

6. 設問 5. で選んだ基本解の線型結合のうち、「 $u \neq 0$  条件」を満たすものを選び。

## 問題 8 の答

1. 座標  $(x, y)$  における熱流束を  $\mathbf{J}(x, y)$  とすると、Fourier の法則が成り立つならば

$$\mathbf{J} = -\kappa \operatorname{grad} u \quad (3)$$

である。

いっぽう、エネルギー保存則より、エネルギーの連続の方程式が成り立つ。それは

$$C \frac{\partial u}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{J} \quad (4)$$

である。

(4) 式に (3) 式を代入すると

$$\begin{aligned} C \frac{\partial u}{\partial t} &= -\operatorname{div}[-\kappa \operatorname{grad} u] \\ &= \kappa \operatorname{div}[\operatorname{grad} u] \end{aligned}$$

となる。

この式に現れた  $\operatorname{div}[\operatorname{grad} u]$  を  $\nabla^2 u$  や  $\Delta u$  などと書く。  $\nabla$  はナブラ、  $\Delta$  はラプラシアンと呼ぶ。すなわち

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\kappa}{C} \Delta u$$

である。この偏微分方程式を熱伝導方程式と呼ぶ。

2. 定常状態では

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

である。

したがって、熱伝導方程式は

$$\Delta u = 0$$

となる。この方程式を、Laplace 方程式と呼ぶ。

記号  $\frac{\partial}{\partial x}$  と  $\frac{\partial}{\partial y}$  を使って表記すれば

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (5)$$

である。

- 3.

$$u(x, 0) = 1 \quad (6)$$

$$u\left(-\frac{\pi}{2}, y\right) = 0 \quad (7)$$

$$u\left(\frac{\pi}{2}, y\right) = 0 \quad (8)$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) = 0 \quad (9)$$

4.

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \quad (10)$$

とおく。

(10) 式を (5) 式に代入すると

$$\frac{d^2 X}{dx^2}(x)Y(y) + X(x)\frac{d^2 Y}{dy^2}(y) = 0$$

となる。これより

$$\frac{\frac{d^2 X}{dx^2}(x)}{X(x)} = -\frac{\frac{d^2 Y}{dy^2}(y)}{Y(y)}$$

が導かれる。

この式の左辺は  $x$  の 1 変数関数、右辺は  $y$  の 1 変数関数である。 $x$  と  $y$  がどのような値であってもこれらが等しくなるためには、どちらも定数であるしかない。その定数を  $p$  とおくと

$$\frac{\frac{d^2 X}{dx^2}(x)}{X(x)} = p, \quad -\frac{\frac{d^2 Y}{dy^2}(y)}{Y(y)} = p$$

と書くことができる。すなわち

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X}{dx^2} &= pX \\ \frac{d^2 Y}{dy^2} &= -pY \end{aligned}$$

の 2 つが同時に成り立つことがわかる。

これより、 $A$ 、 $B$ 、 $D$ 、 $E$ 、 $F$ 、 $G$ 、 $H$ 、 $I$ 、 $K$ 、 $L$ 、 $M$ 、 $N$  を任意定数として、 $p < 0$  ならば

$$\begin{aligned} X &= A \cos[\sqrt{-p}x] + B \sin[\sqrt{-p}x] \\ Y &= D \exp[\sqrt{-p}y] + E \exp[-\sqrt{-p}y] \end{aligned}$$

$p = 0$  ならば

$$\begin{aligned} X &= Fx + G \\ Y &= Hy + I \end{aligned}$$

$p > 0$  ならば

$$\begin{aligned} X &= K \exp[\sqrt{p}x] + L \exp[-\sqrt{p}x] \\ Y &= M \cos[\sqrt{p}y] + N \sin[\sqrt{p}y] \end{aligned}$$

であることがわかる。

以上より、基本解は

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \left( A \cos[\sqrt{-p}x] + B \sin[\sqrt{-p}x] \right) \left( D \exp[\sqrt{-p}y] + E \exp[-\sqrt{-p}y] \right) & (p < 0) \\ u(x, y) &= (Fx + G)(Hy + I) & (p = 0) \\ u(x, y) &= \left( K \exp[\sqrt{p}x] + L \exp[-\sqrt{p}x] \right) \left( M \cos[\sqrt{p}y] + N \sin[\sqrt{p}y] \right) & (p > 0) \end{aligned}$$

である。

5. 前問の結論の基本解は、任意定数  $p, A, B, D, E, F, G, H, I, K, L, M, N$  がどのような値であっても、(5) 式を満たす。つまり、(5) 式に対する基本解は、無数に存在する。それら無数の基本解を線型結合したものが (5) 式に対する一般解であり、当然ながら、一般解も無数に存在する。それら無数の一般解のうち、境界条件を満たすもの（特殊解）は、ごく一部であるから、一般解のうち境界条件を満たすものを次々に絞り込んでいけば、最終的に特殊解を求めることができる。

ここでは、基本解を「 $u = 0$  条件」を満たすものに絞り込んでしまう。「 $u = 0$  条件」は (7) 式、(8) 式、(9) 式である。

まず、(9) 式について考える。

前問の結論で得た基本解のうち、 $p = 0$  のものと  $p > 0$  のものは、(9) 式を満たすことができない。よって

$$p < 0$$

であることがわかる。

さらに、 $p < 0$  の基本解のうち、 $D \neq 0$  のものは、(9) 式を満たすことができない。よって

$$D = 0$$

であることがわかる。

ここまでで、基本解が、次の形に絞りこまれた。 $a$  と  $b$  を任意定数、 $p'$  を正の任意定数として

$$u(x, y) = \left( a \cos[\sqrt{p'} x] + b \sin[\sqrt{p'} x] \right) \exp[-\sqrt{p'} y] \quad (11)$$

である。これは (5) 式、(9) 式を満たす。

次に、(7) 式と (8) 式について考える。

(11) 式で表される基本解が (7) 式と (8) 式を同時に満たすためには、次の条件が満たされなければならない。すなわち、 $\sqrt{p'} = k$  とおいて

$$\begin{array}{|c|} \hline k = 1, 3, 5, \dots \\ \hline b = 0 \\ \hline \end{array} \quad \text{または} \quad \begin{array}{|c|} \hline k = 2, 4, 6, \dots \\ \hline a = 0 \\ \hline \end{array}$$

である。

ここまでで、基本解が、次の形に絞りこまれた。 $a$  と  $b$  を任意定数、 $k$  を正の整数として

$$u(x, y) = \begin{cases} a \cos[kx] \exp[-ky] & (k = 1, 3, 5, \dots) \\ b \sin[kx] \exp[-ky] & (k = 2, 4, 6, \dots) \end{cases} \quad (12)$$

である。これは (5) 式、(7) 式、(8) 式、(9) 式を満たす。

6. 設問 5. で選んだ基本解は (12) 式である。その線型結合は、 $a_k$  ( $k = 1, 3, 5, \dots$ ),  $b_k$  ( $k = 2, 4, 6, \dots$ ) を任意定数として

$$u(x, y) = a_1 \cos[x] \exp[-y] + b_2 \sin[2x] \exp[-2y] + a_3 \cos[3x] \exp[-3y] + b_4 \sin[4x] \exp[-4y] + \dots \quad (13)$$

である。これは (5) 式、(7) 式、(8) 式、(9) 式を満たす。

ここでは、(13) 式で表される解のうち、「 $u \neq 0$  条件」を満たすものを選び出す。「 $u \neq 0$  条件」は (6) 式である。

(13) 式に  $y = 0$  を代入したものを (6) 式の  $u(x, 0)$  に代入すると

$$a_1 \cos[x] + b_2 \sin[2x] + a_3 \cos[3x] + b_4 \sin[4x] + \dots = 1 \quad (14)$$

となる。これより、すべての任意定数 ( $a_1$ 、 $b_2$ 、 $a_3$ 、 $b_4$ 、 $\dots$ ) の値が一意に定まる。それを求めれば、 $u(x, y)$  が得られる。

$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  を定義域とする可算無限個の関数の組

$$\left\{ \cos[x], \sin[2x], \cos[3x], \sin[4x], \dots \right\}$$

は直交関数系である。よって、(14) 式の両辺とこれらの関数との内積をとれば

$$\begin{aligned} a_k \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2[kx] dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos[kx] dx & (k = 1, 3, 5, \dots) \\ b_k \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2[kx] dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin[kx] dx & (k = 2, 4, 6, \dots) \end{aligned}$$

となる。これより  $a_1$ 、 $b_2$ 、 $a_3$ 、 $b_4$ 、 $\dots$  が求まる。

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos[kx] dx}{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2[kx] dx} & (k = 1, 3, 5, \dots) \\ &= \begin{cases} \frac{4}{k\pi} & (k = 1, 5, 9, \dots) \\ -\frac{4}{k\pi} & (k = 3, 7, 11, \dots) \end{cases} \\ b_k &= \frac{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin[kx] dx}{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2[kx] dx} & (k = 2, 4, 6, \dots) \\ &= 0 \end{aligned}$$

以上より

$$u(x, y) = \frac{4}{\pi} \left( \cos[x] \exp[-y] - \frac{1}{3} \cos[3x] \exp[-3y] + \frac{1}{5} \cos[5x] \exp[-5y] - \frac{1}{7} \cos[7x] \exp[-7y] + \dots \right)$$

が得られる。

これが、偏微分方程式 ((5) 式) と境界条件 ((6) 式、(7) 式、(8) 式、(9) 式) を満たす特殊解である。

得られた  $u(x, y)$  をグラフで表すと図 4 のようになる。図 5 はそれを  $y$  軸に平行な視線で見たもの、図 6 は  $x$  軸に平行な視線で見たものである。

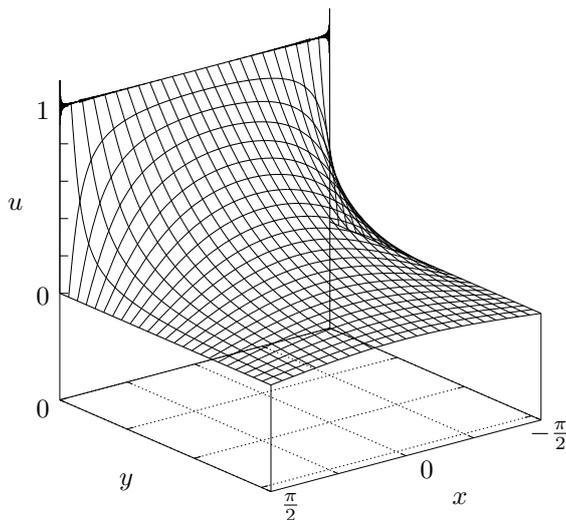


図 4

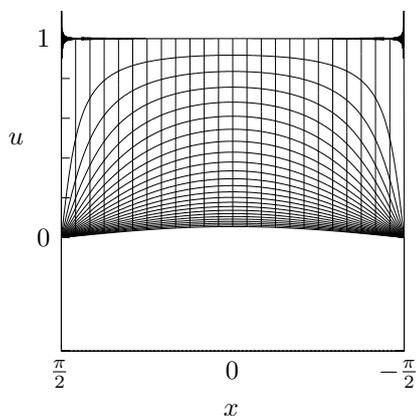


図 5

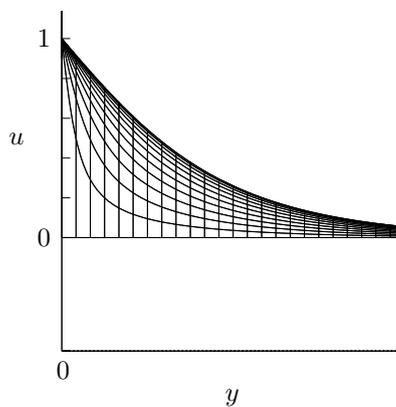


図 6

補足

(14) 式は  $\omega_0 = 1$  すなわち  $T = 2\pi$  の Fourier 級数と同じ形をしているが、 $a_k$  と  $b_k$  を求めた計算は、Fourier 級数展開ではない。なぜなら、 $\cos x$  の周期は  $2\pi$  であるが、 $a_k$  と  $b_k$  を求めるために使ったのは、その半分である  $\pi$  を定義域の幅とする内積だからである。

求めた  $a_k$  と  $b_k$  を (14) 式の左辺に代入したもの

$$\frac{4}{\pi} \left( \cos[x] - \frac{1}{3} \cos[3x] + \frac{1}{5} \cos[5x] - \dots \right)$$

は、周期  $2\pi$  の周期関数

$$f(x) = \begin{cases} f(x + 2\pi) & (x < -\pi) \\ -1 & \left(-\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{2}\right) \\ 1 & \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right) \\ -1 & \left(\frac{\pi}{2} \leq x < \pi\right) \\ f(x - 2\pi) & (\pi \leq x) \end{cases}$$

の Fourier 級数展開と同一である。

## 2.8 Fourier 級数展開の応用

線型な系においては、重ね合わせの原理が成り立つ。すなわち、系で起こりうる現象のうち2つを  $\psi_1$ 、 $\psi_2$  とすると、 $\psi_1$  と  $\psi_2$  がそれぞれ  $a_1$ 、 $a_2$  の強さで同時に起こったとみなせる状況では、 $a_1$  の強さの  $\psi_1$  と  $a_2$  の強さの  $\psi_2$  を足したような現象  $\psi_3 = a\psi_1 + b\psi_2$  が起こる。

### 線型方程式

線型な系とは、線型方程式によって振る舞いが記述される系である。

線型方程式とは、 $\psi_1$  と  $\psi_2$  が解であるならば、それらの線型結合で与えられる  $\psi_3$  ( $a_1$ 、 $a_2$  をスカラー一定数として  $\psi_3 = a_1\psi_1 + a_2\psi_2$ ) もまた解であるような方程式である。

一般に、次のような方程式が線型方程式である。 $\mathcal{T}$  を、 $t$  の関数を別の  $t$  の関数に写す線型作用素とし、 $\psi(t)$  を未知の  $t$  の関数として

$$\mathcal{T}[\psi(t)] = 0$$

作用素とは、写像である。線型作用素とは、線型性を持つ写像である。

線型性とは、次の2つの性質をいう。

$$c \text{ をスカラー一定数として } \mathcal{T}[c\psi(t)] = c\mathcal{T}[\psi(t)]$$

$$\psi_1(t), \psi_2(t) \text{ を } t \text{ の異なる関数として } \mathcal{T}[\psi_1(t) + \psi_2(t)] = \mathcal{T}[\psi_1(t)] + \mathcal{T}[\psi_2(t)]$$

線型作用素の例として、微分  $\frac{d}{dt}$ 、積分  $\int_{t_0}^t dt$  がある。たとえば、 $\frac{d}{dt}$  については、次のように線型性が成り立つ。  
 $\int_{t_0}^t dt$  についても同様である。

$$\frac{d}{dt}(c\psi(t)) = c \frac{d}{dt}\psi(t) \quad , \quad \frac{d}{dt}(\psi_1(t) + \psi_2(t)) = \frac{d}{dt}\psi_1(t) + \frac{d}{dt}\psi_2(t)$$

非線型作用素の例として、べき乗がある。たとえば、次のように、線型性が成り立たない。

$$(c\psi(t))^2 \neq c(\psi(t))^2 \quad , \quad (\psi_1(t) + \psi_2(t))^2 \neq (\psi_1(t))^2 + (\psi_2(t))^2$$

また、「線型作用素を複数回作用させる」という作用素は、線型作用素である。 $\frac{d}{dt}$  を例にとれば

$$\frac{d^2}{dt^2}(c\psi(t)) = c \frac{d^2}{dt^2}\psi(t) \quad , \quad \frac{d^2}{dt^2}(\psi_1(t) + \psi_2(t)) = \frac{d^2}{dt^2}\psi_1(t) + \frac{d^2}{dt^2}\psi_2(t)$$

などが成り立つ。同様に、「線型作用素を作用させてスカラー倍する」「ある線型作用素を作用させたものと別の線型作用素を作用させたものを作り、それらを足す」という作用素も、線型作用素である。

以上すべてを合わせると、 $n$  次式  $p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$  の  $x$  を形式的に  $\frac{d}{dt}$  に置き換えたものを  $p_n\left(\frac{d}{dt}\right)$  とすれば、 $p_n\left(\frac{d}{dt}\right)$  は線型作用素であり

$$p_n\left(\frac{d}{dt}\right)\psi(t) = 0$$

と表される微分方程式は線型方程式であることがわかる。この方程式を、 $n$  階線型微分方程式という。線型方程式の「解の線型結合も解である」という性質は、 $\psi(t)$  を系の状態を表す物理量とすれば、重ね合わせの原理を表す。

線型微分方程式で、上の式のとおり右辺が0のものを同次方程式と呼び、右辺の0を既知の  $t$  の関数  $f(t)$  で置き換えたものを、対応する非同次方程式と呼ぶ。非同次方程式は「解の線型結合が解」にならないが、それでも  $n$  階線型微分方程式と呼ぶ。次の意味において線型と言えるためである。

$n$  階線型非同次微分方程式においては、 $f(t) = f_1(t)$  の場合の解が  $\psi_1(t)$ 、 $f(t) = f_2(t)$  の場合の解が  $\psi_2(t)$  であれば、 $a_1$  と  $a_2$  をスカラー一定数として  $f(t) = a_1f_1(t) + a_2f_2(t)$  である場合の解は  $a_1\psi_1(t) + a_2\psi_2(t)$  である。つまり、 $\psi(t)$  と  $f(t)$  をまとめて、線型性が成り立つと理解できる。

これは、 $\psi(t)$  を系の状態を表す物理量とし、 $f(t)$  を系が受ける外力とすれば、やはり重ね合わせの原理を表す。

### 線型な系の周期的外力に対する応答

線型な系に周期的外力を加える場合の系の振る舞い（外力に対する応答）を調べる問題、すなわち、線型非同次微分方程式の  $f(t)$  が周期関数である場合の解を求める問題は、Fourier 級数展開を応用することによって解決する。

$f(t)$  が周期関数であるなら、Fourier 級数展開によって、三角関数の重ね合わせに展開できるからである。つまり、外力が三角関数である場合の解さえ求められれば、 $f(t)$  がどんな関数であっても、重ね合わせの原理から解が得られるのである。

しかも、三角関数の導関数は再び三角関数であるという性質のために、外力が三角関数である場合の方程式の解は、求めるのが容易い。

### 楽器の音のスペクトル

すべての楽器は、有限の長さの物体（弦や気柱など）の振動で音を作るから、原理的には、その物体の固有振動だけが発生する。固有振動は、音の高さを決める基本振動（基本音）と、2倍振動（2倍音）、3倍振動（3倍音）、…などの倍音である。それらが重ね合わさった結果、特有の音色を生み出す。

このことから、楽器の振動は Fourier 級数展開そのものであることが理解できる。そこで、楽器の音の波形  $f(t)$  を測定して、その Fourier 係数  $a_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ )、 $b_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) を調べれば、楽器の音がどの倍音成分をどれだけの強さで含むかを知ることができる。音色の特徴を、倍音成分の分布によって表すことができるのである。

逆に、得た倍音のスペクトル（Fourier 係数の値）を使って正弦波を重ね合わせることにより、元の波形  $f(t)$  を再現することも可能である。この方法を使えば、楽器の音色を人工的に合成することができる。シンセサイザーの原理である。

### 音声学

楽器の音のスペクトル分析と同じ考え方で、人間の声のスペクトルを分析することができる。

人間の声に含まれる倍音のスペクトルを、音韻（言語で使われる母音や子音などの音声要素）で分類して比較すると、同じ音韻の音には共通する範囲の倍音が強く含まれることがわかる。特定の音韻に強く含まれる倍音を、その音韻のフォルマントと呼ぶ。

シンセサイザーを使って音を合成するとき、特定の音韻のフォルマントの成分を強くすると、その音韻に聞こえるようになることが知られている。このことは、人工音声の合成に利用されている。

### 画像圧縮

画像は、空間座標  $(x, y)$  に対して明るさ  $I$  の値を割り当てる 2変数関数  $I(x, y)$  として表される。

$x$ 、 $y$  の定義域の幅は有限なので、 $I(x, y)$  は  $x$  と  $y$  について Fourier 級数展開することができる。 $x$ 、 $y$  が長さの次元を持つ変数であるから、Fourier 級数展開で用いる  $T$  は（「周期」の代わりに）波長、 $\omega_0$  は（「角振動数」の代わりに）波数と呼ぶのが適切である。

ここで、人が画像を認識する心理学的な仕組みに注目する。 $I(x, y)$  の Fourier 級数展開に含まれる成分のうち、波長の短いものほど、画像の認識に与える影響が小さいことが知られている。

このことを利用すると、画像を数値データとして保存する場合に、不要な情報を捨てて圧縮することができる。

JPEG (Joint Photographic Experts Group) 方式と呼ばれる画像圧縮手法の原理を解説する。

最初に、保存したい画像を、特定の大きさ（ピクセル数）のブロックに分割する。以下、画像圧縮のための情報処理は、各ブロックに対して行う。

次に、各ブロックの画像データ  $I(x, y)$  を、2次元で Fourier 級数展開（余弦関数に展開）する。得られた Fourier 係数  $a_{mn}$  ( $m$  は  $x$  方向の波数の倍数、 $n$  は  $y$  方向の波数の倍数) の値を保存しておけば、元のデータは完全に再生できる。この時点では、画像は圧縮されていない。Fourier 係数の桁数を多くとれば、むしろ、データの量は増える。

次に、 $a_{mn}$  を、元のデータと同じデータの量になる桁数に丸める。字義通りに行えば、これによって得られる結果は、元のデータを Fourier 級数展開しただけで、一切、圧縮されていない。

しかし、ここで工夫を加えることにより、圧縮が実現する。 $a_{mn}$  を丸める桁数を、 $m, n$  が大きいほど少なくする。これにより、 $m, n$  が大きい部分でデータの量が劇的に減少し、その分、 $I(x, y)$  に戻したときの元のデータとのずれが大きくなる。ところが、前述のとおり、大きい  $m, n$  の成分に起因する元の画像との差異は、人の画像認識にほとんど影響を与えない。

この、工夫を加えて丸めた  $a_{mn}$  を記録すれば、元の画像と同一のものと認識され得る画像を、より少ないデータの量で記録できることになる。これが、JPEG 方式の画像圧縮の原理である。

## 問題 9

時刻を  $t$  とする。

電気抵抗  $R$  の抵抗、静電容量  $C$  のキャパシタ、自己インダクタンス  $L$  のインダクタ、起電力  $E(t)$  の電源を接続して、図 7 のような回路を作った。

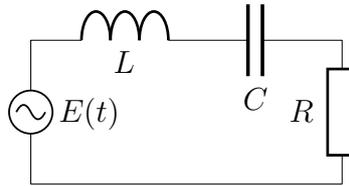


図 7

$E(t)$  が

$$E(t) = \begin{cases} E(t+T) & \left(t < -\frac{T}{2}\right) \\ 0 & \left(-\frac{T}{2} < t < 0\right) \\ E_0 & \left(0 < t < \frac{T}{2}\right) \\ E(t-T) & \left(\frac{T}{2} < t\right) \end{cases}$$

で表される場合の、回路を流れる電流  $I(t)$  を求めよ。

$R = 2.5 \times 10^2 \Omega$ 、 $C = 2.0 \times 10^{-6} \text{ F}$ 、 $L = 2.0 \times 10^{-2} \text{ H}$ 、 $T = 2.0 \times 10^{-2} \text{ s}$ 、 $E_0 = 10.0 \text{ V}$  とする。



## 問題 9 の答

入力される電圧  $E(t)$  は、矩形波交流である。

虚数単位を  $j$  として、 $E(t)$  を複素フーリエ級数展開する。  $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$  に対して

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} E(t) \exp[-jn\omega_0 t] dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} E_0 \exp\left[-jn \frac{2\pi}{T} t\right] dt \\ &= j \frac{E_0}{2n\pi} \left( \exp[-jn\pi] - 1 \right) \\ &= \begin{cases} -j \frac{E_0}{n\pi} & (n = \text{奇数}) \\ 0 & (n = \text{偶数}) \end{cases} \end{aligned}$$

であり、 $c_0$  は

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} E(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} E_0 dt \\ &= \frac{E_0}{2} \end{aligned}$$

である。これらを用いて、 $E(t)$  を

$$E(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{E}_n(t) \quad , \quad \dot{E}_n(t) = c_n \exp\left[j \frac{2n\pi}{T} t\right]$$

と表すことができる。

この電気回路は線型な系であるから、 $\dot{E}_n(t)$  のそれぞれに対する電流の応答を  $\dot{I}_n(t)$  とすれば

$$I(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{I}_n(t)$$

が成り立つ。

$n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$  に対して、 $\dot{E}_n(t)$  は正弦波交流なので、その角振動数  $\omega_n$  に対する回路の複素インピーダンスを  $\dot{Z}_n$  として

$$\dot{I}_n(t) = \frac{\dot{E}_n(t)}{\dot{Z}_n}$$

が成り立つ。 $\dot{Z}_n$  は

$$\dot{Z}_n = R + j \left( \omega_n L - \frac{1}{\omega_n C} \right)$$

であり、 $\omega_n$  は

$$\omega_n = \frac{2n\pi}{T}$$

である。

したがって、 $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$  に対して

$$\dot{I}_n(t) = \frac{c_n}{R + j \left( \frac{2n\pi L}{T} - \frac{T}{2n\pi C} \right)} \exp \left[ j \frac{2n\pi}{T} t \right]$$

であり、これは、 $n = \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots$  に対して 0、 $n = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$  に対して

$$\begin{aligned} &= \frac{-j \frac{E_0}{n\pi}}{R + j \left( \frac{2n\pi L}{T} - \frac{T}{2n\pi C} \right)} \exp \left[ j \frac{2n\pi}{T} t \right] \\ &= \frac{-j \frac{E_0}{n\pi} \left( R - j \left( \frac{2n\pi L}{T} - \frac{T}{2n\pi C} \right) \right)}{R^2 + \left( \frac{2n\pi L}{T} - \frac{T}{2n\pi C} \right)^2} \exp \left[ j \frac{2n\pi}{T} t \right] \\ &= -\frac{E_0}{n\pi} \cdot \frac{\left( \frac{2n\pi L}{T} - \frac{T}{2n\pi C} \right) + jR}{R^2 + \left( \frac{2n\pi L}{T} - \frac{T}{2n\pi C} \right)^2} \exp \left[ j \frac{2n\pi}{T} t \right] \end{aligned}$$

である。

また、 $\dot{E}_0(t)$  は直流なので

$$\dot{I}_0(t) = 0$$

である。

以上より

$$I(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n \exp \left[ j \frac{2n\pi}{T} t \right]$$

$$d_n = \begin{cases} -\frac{E_0}{n\pi} \cdot \frac{\left( \frac{2n\pi L}{T} - \frac{T}{2n\pi C} \right) + jR}{R^2 + \left( \frac{2n\pi L}{T} - \frac{T}{2n\pi C} \right)^2} & (n = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots) \\ 0 & (n = 0, \pm 2, \pm 4, \dots) \end{cases}$$

が得られる。これが、複素 Fourier 級数展開で表した答である。

実 Fourier 級数展開では

$$I(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \left[ \frac{2n\pi}{T} t \right] + b_n \sin \left[ \frac{2n\pi}{T} t \right] \right)$$

となり、 $n = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$  に対して

$$\begin{aligned} a_n &= d_{-n} + d_n \\ &= -\frac{2E_0}{n\pi} \cdot \frac{\frac{2n\pi L}{T} - \frac{T}{2n\pi C}}{R^2 + \left( \frac{2n\pi L}{T} - \frac{T}{2n\pi C} \right)^2} \\ b_n &= j(d_n - d_{-n}) \\ &= \frac{2E_0}{n\pi} \cdot \frac{R}{R^2 + \left( \frac{2n\pi L}{T} - \frac{T}{2n\pi C} \right)^2} \end{aligned}$$

$n = \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots$  に対して

$$\begin{aligned} a_n &= 0 \\ b_n &= 0 \end{aligned}$$

$n = 0$  に対して

$$a_0 = 0$$

である。

また、振幅と位相による表現では

$$I(t) = \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \left[ \frac{2n\pi}{T} t + \psi_n \right]$$

となり、 $n = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$  に対して

$$\begin{aligned} B_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ &= \frac{2E_0}{n\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{R^2 + \left( \frac{2n\pi L}{T} - \frac{T}{2n\pi C} \right)^2}} \\ \left\{ \begin{array}{l} \cos \psi_n = \frac{b_n}{B_n} \\ \sin \psi_n = \frac{a_n}{B_n} \end{array} \right. &= \begin{cases} \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left( \frac{2n\pi L}{T} - \frac{T}{2n\pi C} \right)^2}} \\ -\frac{\frac{2n\pi L}{T} - \frac{T}{2n\pi C}}{\sqrt{R^2 + \left( \frac{2n\pi L}{T} - \frac{T}{2n\pi C} \right)^2}} \end{cases} \end{aligned}$$

である。 $n = 0, \pm 2, \pm 4, \dots$  に対しては、 $B_n = 0$  であり、 $\psi_n$  は定義されない。

$R = 2.5 \times 10^2 \Omega$ 、 $C = 2.0 \times 10^{-6} \text{F}$ 、 $L = 2.0 \times 10^{-2} \text{H}$ 、 $T = 2.0 \times 10^{-2} \text{s}$ 、 $E_0 = 10.0 \text{V}$  を代入すると、 $n = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$  に対して

$$a_n = -\frac{20.0 \times (2n^2\pi^2 - 5.0 \times 10^3)}{(2.5 \times 10^2 \times n\pi)^2 + (2(n\pi)^2 - 5.0 \times 10^3)^2} \text{V}$$

$$b_n = \frac{5.0 \times 10^3 \times n\pi}{(2.5 \times 10^2 \times n\pi)^2 + (2(n\pi)^2 - 5.0 \times 10^3)^2} \text{V}$$

となる。

得られた  $I(t)$  をグラフで表すと、図 8 になる。

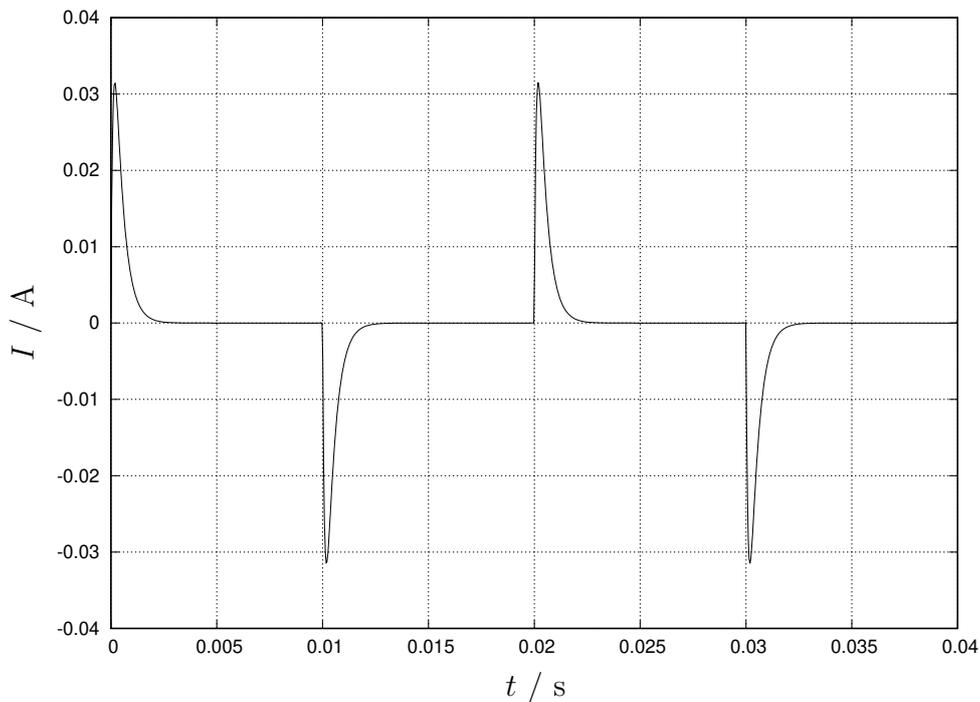


図 8

**補足**

パラメータの値を変化させて  $I(t)$  がどう変化するかを調べると、現象をより深く理解することができる。たとえば、 $R = 25 \Omega$  とすると図 9、 $R = 2.5 \Omega$  とすると図 10 が得られる。

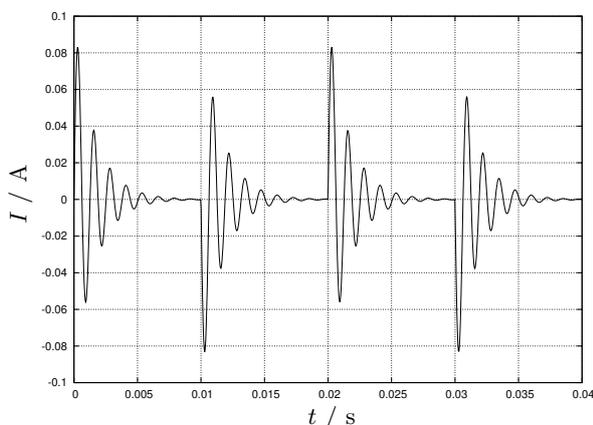


図 9

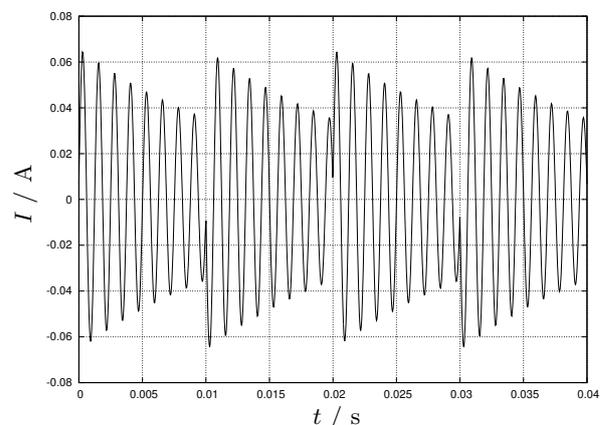


図 10

これらの結果によれば、入力電圧の立ち上がりと立ち下りの瞬間に大きな電流が発生している。これはおそらくインダクタの逆起電力によるものと考えられる。その後は、単純な減衰 ( $R = 2.5 \times 10^2 \Omega$ ) および減衰振動 ( $R = 25 \Omega$  と  $R = 2.5 \Omega$ ) が起こっている。これはおそらく、 $LCR$  回路に直流を入力した場合に一般に見られる過渡応答であろう。 $R = 2.5 \times 10^2 \Omega$  の場合は過減衰と考えられる。

## 問題 10

質量  $m$  のおもりをばね定数  $k$  のばねで吊るした鉛直ばね振り子に、周期的な外力  $F(t)$  を加える。

$F(t)$  が

$$F(t) = \begin{cases} F(t+T) & \left(t < -\frac{T}{2}\right) \\ \frac{2F_0}{T} t & \left(-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}\right) \\ F(t-T) & \left(\frac{T}{2} < t\right) \end{cases}$$

で表される場合のおもりの運動を求めよ。

$m = 5.0 \times 10^{-1} \text{ kg}$ 、 $k = 2.0 \text{ N/m}$ 、 $T = 40.0 \text{ s}$ 、 $F_0 = 1.0 \text{ N}$  とする。



## 問題 10 の答

平衡位置からのおもりの変位を  $x(t)$  とする。

平衡位置を  $x_0$ 、符号を含めた重力加速度を  $g$  とすると、おもりの運動方程式は

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = m g - k(x_0 + x) + F$$

である。  $m g - k x_0 = 0$  が成り立つので、これを使って  $x_0$  を消去すると

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + k x = F$$

を得る。この微分方程式の解  $x(t)$  を求めればよい。

$F(t)$  を Fourier 級数展開すると

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \quad , \quad F_n(t) = \frac{2F_0}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin \left[ n \frac{2\pi}{T} t \right]$$

となる。

この鉛直ばね振り子は線型な系であるから、 $F_n(t)$  のそれぞれに対するおもりの変位の応答を  $x_n(t)$  とすれば

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n(t)$$

が成り立つ。

$x_n(t)$  は、微分方程式

$$m \frac{d^2 x_n}{dt^2} + k x_n = F_n$$

の解である。三角関数の微分が再び三角関数になることから、 $x_n(t)$  が三角関数であればこの微分方程式を満たす可能性があると考えられる。そこで、 $x_n(t) = a_n \cos \left[ n \frac{2\pi}{T} t \right] + b_n \sin \left[ n \frac{2\pi}{T} t \right]$  とおいてみる。これを微分方程式に代入すると

$$\left( -m \left( n \frac{2\pi}{T} \right)^2 + k \right) \left( a_n \cos \left[ n \frac{2\pi}{T} t \right] + b_n \sin \left[ n \frac{2\pi}{T} t \right] \right) = \frac{2F_0}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin \left[ n \frac{2\pi}{T} t \right]$$

が得られる。これより

$$\begin{aligned} a_n &= 0 \\ b_n &= \frac{\frac{2F_0}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{n-1}}{n}}{-m \left( n \frac{2\pi}{T} \right)^2 + k} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

であることがわかる。

$m = 5.0 \times 10^{-1} \text{ kg}$ 、 $k = 2.0 \text{ N/m}$ 、 $T = 40.0 \text{ s}$ 、 $F_0 = 1.0 \text{ N}$  を代入すると、 $n = 1, 2, 3, \dots$  に対して

$$b_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n\pi(-5.0 \times 10^{-3} \times n^2\pi^2 + 1.0)} \text{ m}$$

となる。

得られた  $x(t)$  をグラフで表すと、図 11 になる。

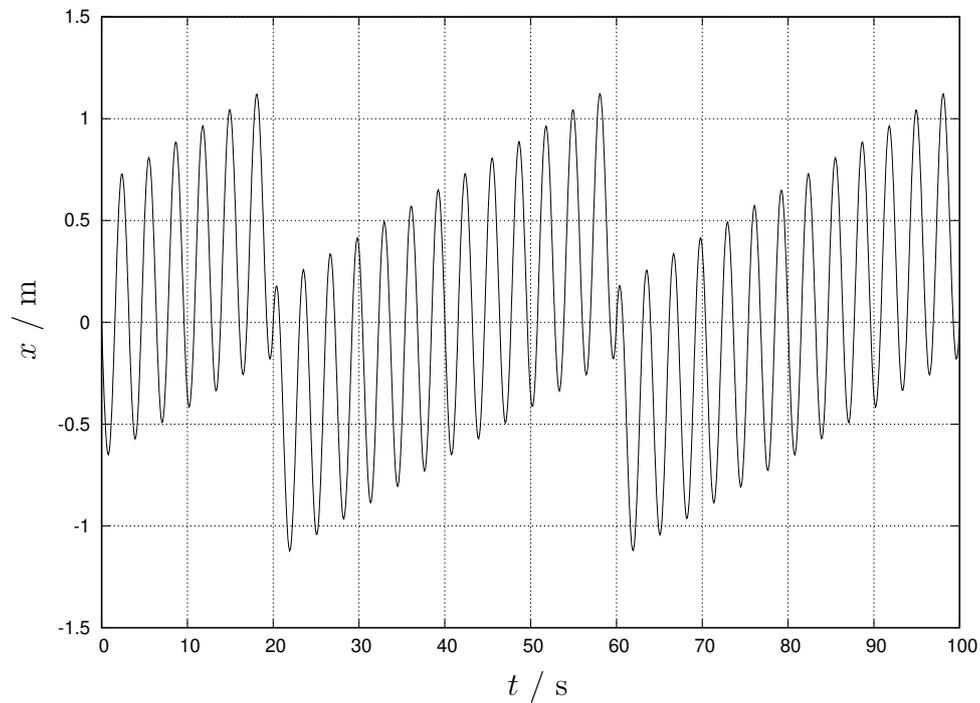


図 11

### 3 Fourier 変換

#### 3.1 非周期関数の Fourier 級数展開

虚数単位を  $i$  とする。

複素 Fourier 級数展開の式は、 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$  として

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp[in\omega_0 t]$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \exp[-in\omega_0 t] dt \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

である。 $\omega_0$  を  $\Delta\omega$  と書き、 $n\Delta\omega$  を  $\omega_n$  とおけば

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp[i\omega_n t]$$

$$c_n = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{\Delta\omega}}^{\frac{\pi}{\Delta\omega}} f(t) \exp[-i\omega_n t] dt \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

である。

ここで、 $T \rightarrow \infty$  の極限について考える。

この極限において、 $\Delta\omega \rightarrow 0$  である。したがって、 $\omega_n$  と  $\omega_{n+1}$  の差は無限に小さくなる。ゆえに、 $\omega_n$  を  $\omega$  と書くことにすれば、 $n$  を  $-\infty$  から  $\infty$  まで離散的に変化させる操作は、 $\omega$  を  $-\infty$  から  $\infty$  まで連続的に変化させる操作に近づく。

すると、 $c_n$  は、 $n$  に対応して値が定まる離散的な数列から、 $\omega$  に対応して値が定まる連続的な関数に近づく。その関数を  $c(\omega)$  とする。

そして、総和は積分になる。

また、単独の因子として現れる  $\Delta\omega$  は、無限に小さい極限で微分  $d\omega$  になる。

以上のことをすべて考慮して複素 Fourier 級数展開の式を書き直すと

$$f(t) = \int_{\omega=-\infty}^{\infty} c(\omega) \exp[i\omega t] dt \quad (15)$$

$$c(\omega) = \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp[-i\omega t] dt \quad (16)$$

となる。

$T \rightarrow \infty$  の極限とは、 $f(t)$  が非周期関数である場合のことである。つまり、この考察は、非周期関数に対しても Fourier 級数展開の概念が適用できることを示す。そして、非周期関数は級数でなく積分に展開されることを示唆する。

しかし、解析学の標準的な記法に従うと、上で得られた表現では  $f(t)$  も  $c(\omega)$  も値が定まらない。

そこで、Fourier 級数展開に直接対応する  $c(\omega)$  を使うことはやめ、かわりに、次に説明する Fourier 変換を利用することを考える。

### 3.2 Fourier 積分

(16) 式を (15) 式に代入すると

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \left( \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp[-i\omega t] dt \right) \exp[i\omega t] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \left( d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp[-i\omega t] dt \right) \exp[i\omega t] \end{aligned}$$

となる。

この式に現れる第 1 の積分記号は

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp[-i\omega t] dt \text{ に } d\omega \text{ を掛けたもの}} \text{ にさらに } \exp[i\omega t] \text{ を掛けたもの} \text{ の総和}$$

という意味であり

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp[-i\omega t] dt \text{ に } d\omega \text{ を掛けたもの}} \text{ にさらに } \exp[i\omega t] \text{ を掛けたもの}$$

は ( $d\omega$  の 1 乗に比例するので) 1 次の微分であるから、標準的な記法による  $\omega$  での (ふつうの) 積分と解釈してよい。よって

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp[-i\omega t] dt \right) \exp[i\omega t] d\omega \quad (17)$$

と書ける。この式を **Fourier 積分** と呼ぶ。

この式の括弧で囲まれた部分は  $\omega$  の関数であるから、これを  $F(\omega)$  とおくと

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp[-i\omega t] dt$$

である。これは、前述の  $c(\omega)$  に近い意味を持つ量である。この  $F(\omega)$  を  $f(t)$  の **Fourier 変換** と呼ぶ。あるいは、 $f(t)$  から  $F(\omega)$  を求める演算を **Fourier 変換** と呼ぶ。

$F(\omega)$  を使うと、 $f(t)$  は

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp[i\omega t] d\omega$$

と表せる。 $f(t)$  を  $F(\omega)$  の **Fourier 逆変換** と呼ぶ。あるいは、 $F(\omega)$  から  $f(t)$  を求める演算を **Fourier 逆変換** と呼ぶ。

この説明では、係数  $\frac{1}{2\pi}$  は Fourier 逆変換に含まれるものとしたが、この係数を Fourier 変換と Fourier 逆変換のどちらの定義に含めるかについてはいくつかの流儀があり、統一されてはいない。たとえば、(17) 式を

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp[-i\omega t] dt \right) \exp[i\omega t] d\omega$$

と解釈して、Fourier 変換を

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp[-i\omega t] dt$$

Fourier 逆変換を

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp[i\omega t] d\omega$$

と定義する流儀もある。これを採用すると、Fourier 変換と Fourier 逆変換が形式的な対称性を持つ。

### 3.3 Fourier 変換

本書では、Fourier 変換と Fourier 逆変換の定義として、次のものを採用する。

#### Fourier 変換

関数  $f(t)$  の Fourier 変換を  $F(\omega)$  とすると

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp[-i\omega t] dt$$

関数  $F(\omega)$  の Fourier 逆変換を  $f(t)$  とすると

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp[i\omega t] d\omega$$



## 問題 11

以下の関数を Fourier 変換せよ。

$$1. D \text{ を正の実数の定数として、 } f(t) = \begin{cases} 0 & (t < -\frac{D}{2}) \\ 1 & (-\frac{D}{2} \leq t \leq \frac{D}{2}) \\ 0 & (\frac{D}{2} < t) \end{cases}$$

$$2. D \text{ を正の実数の定数として、 } f(t) = \begin{cases} 0 & (t < -\frac{D}{2}) \\ \frac{2}{D}t + 1 & (-\frac{D}{2} \leq t < 0) \\ -\frac{2}{D}t + 1 & (0 \leq t \leq \frac{D}{2}) \\ 0 & (\frac{D}{2} < t) \end{cases}$$

$$3. \sigma \text{ を正の実数の定数として、 } f(t) = \exp\left[-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right]$$

$$4. \alpha \text{ を正の実数の定数として、 } f(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ \exp[-\alpha t] & (0 \leq t) \end{cases}$$

## 問題 11 の答

虚数単位を  $i$  とする。いずれの設問においても、 $f(t)$  の Fourier 変換を  $F(\omega)$  とする。

1.

$$\begin{aligned}
 F(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp[-i\omega t] dt \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} \exp[-i\omega t] dt \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{-i\omega} \left( \exp\left[-i\omega \frac{D}{2}\right] - \exp\left[i\omega \frac{D}{2}\right] \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2}{\omega} \sin\left[\frac{D}{2}\omega\right]
 \end{aligned}$$

一般に  $F(\omega)$  は複素数であるが、この例では実数になった。 $D = 1$  の場合の  $F(\omega)$  のグラフを図 12 に示す。

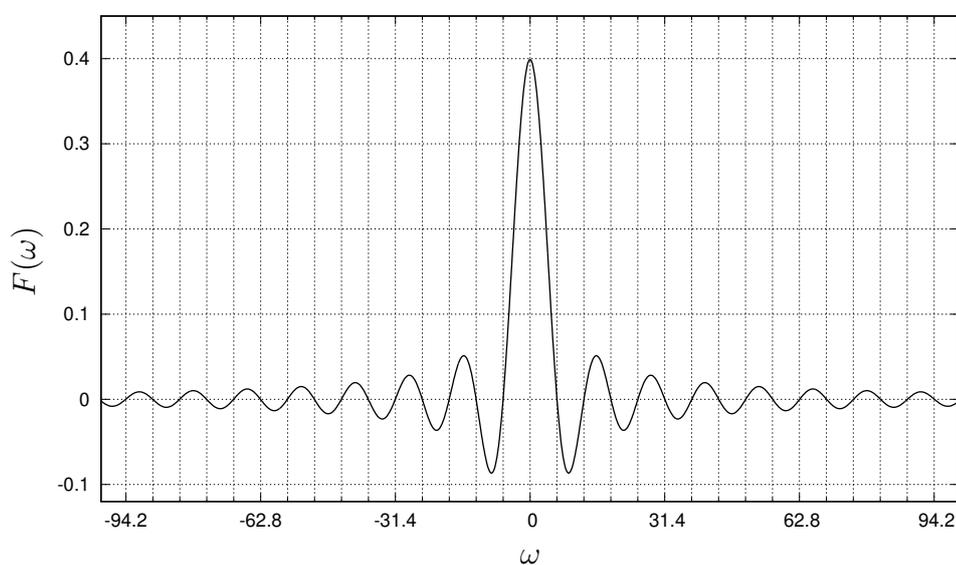


図 12

2.

$$\begin{aligned}
 F(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp[-i\omega t] dt \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_{-\frac{D}{2}}^0 \left( \frac{2}{D}t + 1 \right) \exp[-i\omega t] dt + \int_0^{\frac{D}{2}} \left( -\frac{2}{D}t + 1 \right) \exp[-i\omega t] dt \right) \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2}{D\omega^2} \left( \exp\left[ i\omega \frac{D}{2} \right] + \exp\left[ -i\omega \frac{D}{2} \right] - 2 \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{4}{D\omega^2} \left( 1 - \cos\left[ \frac{D}{2}\omega \right] \right)
 \end{aligned}$$

一般に  $F(\omega)$  は複素数であるが、この例では実数になった。  $D = 1$  の場合の  $F(\omega)$  のグラフを図 13 に示す。

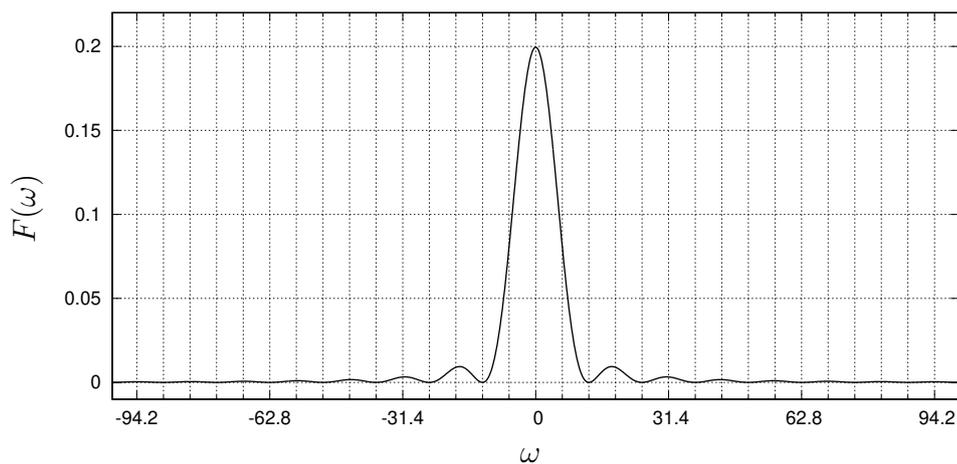


図 13

3.

$$\begin{aligned}
F(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp[-i\omega t] dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right] \exp[-i\omega t] dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\left(\frac{t^2}{2\sigma^2} + i\omega t\right)\right] dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\left(\frac{t^2}{2\sigma^2} + i\omega t - \frac{\sigma^2\omega^2}{2}\right) - \frac{\sigma^2\omega^2}{2}\right] dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\sigma} + i\sigma\omega\right)^2 - \frac{\sigma^2\omega^2}{2}\right] dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\sigma} + i\sigma\omega\right)^2\right] \exp\left[-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}\right] dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}\right] \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\sigma} + i\sigma\omega\right)^2\right] dt
\end{aligned}$$

ここに現れた積分を  $I$  とする。すなわち

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\sigma} + i\sigma\omega\right)^2\right] dt$$

この  $I$  が

$$I_G = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right] dt$$

に等しいことを示す。

Gauss 平面上の 積分経路  $C$  での 複素積分

$$I_c = \oint_C \exp[-z^2] dz$$

を考える。  $C$  は、  $R$  を実数として

$$\begin{aligned} C &: C_1 + C_2 + C_3 + C_4 \\ C_1 &: z = \frac{t}{\sqrt{2}\sigma} & (-R \leq t \leq R) \\ C_2 &: z = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{R}{\sigma} + iy \right) & (0 \leq y \leq \sigma\omega) \\ C_3 &: z = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{t}{\sigma} + i\sigma\omega \right) & (R \geq t \geq -R) \\ C_4 &: z = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\frac{R}{\sigma} + iy \right) & (\sigma\omega \geq y \geq 0) \end{aligned}$$

なる長方形の周回経路で、積分の向きは左回りとする。ここで、4つの積分経路  $C_1$ 、 $C_2$ 、 $C_3$ 、 $C_4$  での  $\exp[-z^2]$  の積分を、それぞれ

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{C_1} \exp[-z^2] dz \\ I_2 &= \int_{C_2} \exp[-z^2] dz \\ I_3 &= \int_{C_3} \exp[-z^2] dz \\ I_4 &= \int_{C_4} \exp[-z^2] dz \end{aligned}$$

とすれば

$$I_c = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

と表せる。

これに対して  $R \rightarrow \infty$  の極限を考える。すると、 $I_1 \rightarrow I_G$ 、 $I_2 \rightarrow 0$ 、 $I_3 \rightarrow -I$ 、 $I_4 \rightarrow 0$  となる。複素関数  $\exp[-z^2]$  は全 Gauss 平面上で正則 (Gauss 平面上に特異点を持たない) であるから Cauchy の積分定理により

$$I_c = 0$$

が成り立つ。以上より、 $I = I_G$  が示される。

$R \rightarrow \infty$  の極限における  $I_1$ 、 $I_2$ 、 $I_3$ 、 $I_4$  は

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-R}^R \exp\left[-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right] dt \\ &\xrightarrow{R \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right] dt \\ &= I_G \\ I_2 &= \int_0^{\sigma\omega} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{R}{\sigma} + iy\right)^2\right] dy \\ &= \int_0^{\sigma\omega} \exp\left[-\frac{R^2}{2\sigma^2} + \frac{y^2}{2} - i\frac{R}{\sigma}y\right] dy \\ &= \exp\left[-\frac{R^2}{2\sigma^2}\right] \int_0^{\sigma\omega} \exp\left[\frac{y^2}{2} - i\frac{R}{\sigma}y\right] dy \\ &= \exp\left[-\frac{R^2}{2\sigma^2}\right] \times (\text{有限値}) \\ &\xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_R^{-R} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{t}{\sigma} + i \sigma \omega \right)^2 \right] dt \\
&= - \int_{-R}^R \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{t}{\sigma} + i \sigma \omega \right)^2 \right] dt \\
&\xrightarrow{R \rightarrow \infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{t}{\sigma} + i \sigma \omega \right)^2 \right] dt \\
&= -I \\
I_4 &= \int_{\sigma \omega}^0 \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( -\frac{R}{\sigma} + iy \right)^2 \right] dy \\
&= I_2 \text{ と同様} \\
&\xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0
\end{aligned}$$

と計算でき、上述のことが確かめられる。

さて、 $I = I_G$  であることが示されたので、 $F(\omega)$  が

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{\sigma^2 \omega^2}{2} \right] I_G$$

であることがわかった。

$I_G$  は Gauss 積分としてよく知られており

$$I_G = \sqrt{2\pi} \sigma$$

である。この導出は省略する。

結論として

$$F(\omega) = \sigma \exp \left[ -\frac{\sigma^2}{2} \omega^2 \right]$$

が得られる。

この結論は、「Gauss 関数の Fourier 変換は Gauss 関数である」ことを示している。

#### 4. この $f(t)$ は、Heaviside の単位ステップ関数

$$U(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 1 & (0 \leq t) \end{cases}$$

を用いて

$$f(t) = \exp[-\alpha t] \cdot U(t)$$

と表すこともできる。

$$\begin{aligned}
F(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp[-i\omega t] dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \exp[-\alpha t] \exp[-i\omega t] dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \exp[-(\alpha + i\omega)t] dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\alpha + i\omega)}
\end{aligned}$$

### 3.4 Fourier 変換の性質

虚数単位を  $i$  とする。

関数  $f(t)$  の Fourier 変換を  $F(\omega)$ 、関数  $g(t)$  の Fourier 変換を  $G(\omega)$  とすると、一般に、Fourier 変換は以下のような性質を持つ。

	$t$ の関数	その Fourier 変換	
線型性	$a f(t) + b g(t)$	$a F(\omega) + b G(\omega)$	$a, b$ は定数
時間のシフト	$f(t - t_0)$	$\exp[-i\omega t_0] \cdot F(\omega)$	$t_0$ は実数の定数
振動数のシフト	$\exp[i\omega_0 t] \cdot f(t)$	$F(\omega - \omega_0)$	$\omega_0$ は実数の定数
時間のスケーリング	$f(kt)$	$\frac{1}{ k } \cdot F\left(\frac{\omega}{k}\right)$	$k$ は実数の定数
時間微分	$\frac{df}{dt}(t)$	$i\omega \cdot F(\omega)$	
畳み込み積分	$(f * g)(t)$	$\sqrt{2\pi} F(\omega) \cdot G(\omega)$	
積	$f(t) \cdot g(t)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} (F * G)(\omega)$	

また、応用上重要な関数およびその Fourier 変換として、次のものを挙げておく。

$t$ の関数	その Fourier 変換	
$\exp[-\alpha t] \cdot U(t)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}(\alpha + i\omega)}$	$\alpha$ は正の実数の定数、 $U(t)$ は Heaviside の単位ステップ関数

Heaviside の単位ステップ関数は

$$U(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 1 & (0 \leq t) \end{cases}$$

で表される関数である。



## 問題 12

関数  $f(t)$  の Fourier 変換を  $F(\omega)$ 、関数  $g(t)$  の Fourier 変換を  $G(\omega)$  とする。

1.  $a, b$  を定数として、 $a f(t) + b g(t)$  の Fourier 変換を求めよ。
2.  $t_0$  を実数の定数として、 $f(t - t_0)$  の Fourier 変換を求めよ。
3.  $\omega_0$  を実数の定数として、 $\exp[i\omega_0 t] \cdot f(t)$  の Fourier 変換を求めよ。
4.  $k$  を正の実数の定数として、 $f(kt)$  の Fourier 変換を求めよ。
5.  $\frac{df}{dt}(t)$  の Fourier 変換を求めよ。
6.  $(f * g)(t)$  の Fourier 変換を求めよ。ただし、 $(f * g)(t)$  は  $f(t)$  と  $g(t)$  の 畳み込み積分

$$\begin{aligned}(f * g)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t') \cdot g(t') dt' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t') \cdot g(t - t') dt'\end{aligned}$$

である。

7.  $f(t) \cdot g(t)$  の Fourier 変換を求めよ。

## 問題 12 の答

虚数単位を  $i$  とする。Fourier 変換を表す演算子を  $\mathcal{F}[\dots]$ 、Fourier 逆変換を表す演算子を  $\mathcal{F}^{-1}[\dots]$  とする。

1. Fourier 変換は線型作用素である。よって

$$\mathcal{F}[a f(t) + b g(t)] = a F(\omega) + b G(\omega)$$

である。

2.

$$\mathcal{F}[f(t - t_0)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0) \exp[-i\omega t] dt$$

$t' = t - t_0$  と変数変換すると

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t') \exp[-i\omega(t' + t_0)] dt' \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t') \exp[-i\omega t'] \exp[-i\omega t_0] dt' \\ &= \exp[-i\omega t_0] \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t') \exp[-i\omega t'] dt' \\ &= \exp[-i\omega t_0] \cdot F(\omega) \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\exp[i\omega_0 t] \cdot f(t)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i\omega_0 t] \cdot f(t) \exp[-i\omega t] dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp[-i(\omega - \omega_0)t] dt \\ &= F(\omega - \omega_0) \end{aligned}$$

4.

$$\mathcal{F}[f(kt)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(kt) \exp[-i\omega t] dt$$

$t' = kt$  と変数変換すると

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t') \exp\left[-i\omega \frac{t'}{k}\right] \frac{1}{k} dt' \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} k} \int_{-\infty}^{\infty} f(t') \exp\left[-i \frac{\omega}{k} t'\right] dt' \\ &= \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t') \exp\left[-i \frac{\omega}{k} t'\right] dt' \\ &= \frac{1}{k} \cdot F\left(\frac{\omega}{k}\right) \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[\frac{df}{dt}(t)\right] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df}{dt}(t) \exp[-i\omega t] dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \left[ f(t) \exp[-i\omega t] \right]_{-\infty}^{\infty} - (-i\omega) \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp[-i\omega t] dt \right)\end{aligned}$$

ここで、 $\left[ f(t) \exp[-i\omega t] \right]_{-\infty}^{\infty} = 0$  としてよいと考えられる。なぜなら、この問題は  $F(\omega)$  が存在することを前提にしており、 $F(\omega)$  が存在するのは  $\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) \exp[-i\omega t] = 0$  かつ  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \exp[-i\omega t] = 0$  が満たされる場合だけだからである。よって

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( 0 + i\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp[-i\omega t] dt \right) \\ &= i\omega \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp[-i\omega t] dt \\ &= i\omega \cdot F(\omega)\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[(f * g)(t)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(t) \exp[-i\omega t] dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t') \cdot g(t') dt' \right) \exp[-i\omega t] dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t=-\infty}^{\infty} \int_{t'=-\infty}^{\infty} f(t-t') \cdot g(t') \exp[-i\omega t] dt' dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t') \exp[-i\omega t] dt \right) \cdot g(t') dt' \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f(t-t')] \cdot g(t') dt' \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \exp[-i\omega t'] \cdot F(\omega) \right) \cdot g(t') dt' \\
&= F(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} g(t') \exp[-i\omega t'] dt' \\
&= \sqrt{2\pi} F(\omega) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(t') \exp[-i\omega t'] dt' \\
&= \sqrt{2\pi} F(\omega) \cdot G(\omega)
\end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f(t) \cdot g(t)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot g(t) \exp[-i\omega t] dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \mathcal{F}^{-1}[G(\omega)] \exp[-i\omega t] dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega') \exp[i\omega' t] d\omega' \right) \exp[-i\omega t] dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t=-\infty}^{\infty} \int_{\omega'=-\infty}^{\infty} f(t) \cdot G(\omega') \exp[i\omega' t] \exp[-i\omega t] d\omega' dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t=-\infty}^{\infty} \int_{\omega'=-\infty}^{\infty} f(t) \cdot G(\omega') \exp[-i(\omega - \omega')t] d\omega' dt
\end{aligned}$$

$\omega'' = \omega - \omega'$  と変数変換すると

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t=-\infty}^{\infty} \int_{\omega''=-\infty}^{-\infty} f(t) \cdot G(\omega - \omega'') \exp[-i\omega'' t] (-1) d\omega'' dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t=-\infty}^{\infty} \int_{\omega''=-\infty}^{\infty} f(t) \cdot G(\omega - \omega'') \exp[-i\omega'' t] d\omega'' dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp[-i\omega'' t] dt \right) \cdot G(\omega - \omega'') d\omega'' \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega'') \cdot G(\omega - \omega'') d\omega'' \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (F * G)(\omega)
\end{aligned}$$

### 3.5 Fourier 変換の応用

断らない限り、虚数単位を  $i$  とする。

#### 線型な系の外力に対する応答

線型な系に周期的外力を加える場合の系の応答を調べる問題は、Fourier 級数展開を応用して解決できることを説明した。周期的でない外力を加える場合の系の応答を調べる問題は、同様の考え方により、Fourier 変換を応用して解決できる。

#### 線型非同次微分方程式の解法

「関数  $x(t)$  の導関数の Fourier 変換は  $x(t)$  の Fourier 変換の  $i\omega$  倍である」という性質により、線型微分方程式の両辺を Fourier 変換すると、微分演算子を含まない方程式、すなわち代数方程式になる。

代数方程式は微分方程式よりも解くのが簡単であるから、これを解いて Fourier 逆変換すれば、比較的簡単に  $x(t)$  を求めることができる。

#### Laplace 変換

Fourier 変換を用いて解くことのできない線型非同次微分方程式がある。Fourier 変換の本質的な定義

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp[-i\omega t] dt$$

の右辺の積分が有限値に収束しないような  $f(t)$  を非同次項として持つ方程式がそれにあたる。そのような  $f(t)$  には対応する  $F(\omega)$  が存在せず、Fourier 変換できない。

この不便を解消するよう Fourier 変換を修正することにより、Laplace 変換が得られる。

まず、物理的な応用を前提とするため、 $f(t)$  の定義域を  $t \geq 0$  とする。そして、 $f(t)$  に関数  $\exp[-\alpha t]$  ( $\alpha$  は実数の定数) を掛けた関数  $g(t) = f(t) \exp[-\alpha t]$  を Fourier 変換する。すると、 $\alpha + i\omega$  を  $s$  とおけば

$$G(s) = \int_0^{\infty} f(t) \exp[-st] dt$$

が得られる。この右辺の積分は、 $f(t)$  が Fourier 変換を収束させないような関数であっても、指数位数の関数でさえあれば、収束する。それゆえ、 $f(t)$  から  $G(s)$  への変換は、Fourier 変換よりも応用できる範囲が広い。 $G(s)$  を  $f(t)$  の Laplace 変換という。

上で定義した Laplace 変換に対応する Laplace 逆変換は

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C G(s) \exp[st] ds$$

である。積分経路  $C$  は、 $\operatorname{Re}[s] = \alpha$  で表される虚軸に平行な直線上で、 $\alpha - i\infty$  を始点、 $\alpha + i\infty$  を終点とする経路である。

#### 音声学

すでに説明したとおり、音のスペクトルを調べる道具として Fourier 解析が利用でき、それを応用して有益な研究が多く行われている。

対象となる音が楽音（基本音とその倍音から成る音）であれば、Fourier 級数展開で分析できるが、雑音（楽音でない音）であれば、Fourier 変換で分析できる。

音韻では、母音は楽音に近く、子音は雑音に近い、したがって、Fourier 変換を利用すれば、子音の音声学的特徴を分析することができる。

### 騒音対策

機械などが動作するときの騒音の低減は、重要な工学的課題である。それには、騒音の発生源や発生機構を調べることが有効であり、そのために、Fourier 変換が重要な役割を果たす。

工場などにおいて、騒音レベルが法的基準を超えず規制の対象ではないにもかかわらず、苦情を受けるというケースが存在する。そのような場合に、騒音のスペクトルの測定から原因となる機器や部品を特定し、安価な対策で特定の騒音を低減して苦情を解消するなどといった活動が、実際に行われている。

### 変調と検波

問題 15 に示したように、波を使った情報伝達の原理は、Fourier 変換を使って説明することができる。

### 光の回折

光の回折は、回折格子の透過率パターンの周期性のために、特定の方向で強め合いの条件が満たされることによって起こる現象である。したがって、回折光の強度パターンは、回折格子の透過率パターンの Fourier 変換を反映したものになる。問題 16 にそれを示した。

X 線回折は、結晶格子で回折した光の、方向による強度分布を測定することによって原子の配列を調べる手法である。これを用いれば、未知の物質の原子配列が、手に取るようにわかってしまう。これは驚くべきことであるが、原子配列の Fourier 変換を直接測定していると考えると、理解しやすい。

### 不確定性原理

量子力学では、プランク定数を  $h$ 、 $\frac{h}{2\pi}$  を  $\hbar$  とし、粒子の位置の不確かさを  $\Delta x$ 、運動量の不確かさを  $\Delta p$  とすると

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

が成り立つ。

これは、波が持つ「幅の狭いパルス波は広い範囲の波数の成分から成り、幅の広いパルス波は狭い範囲の波数の成分から成る」という性質からの帰結と解釈できる。波のこの性質は、Fourier 変換から導かれるもので、量子力学の波動関数に限らず、一般の波に関して成り立つ。

### CT スキャン

computed tomography (CT) の原理を説明する。

2変数関数  $f(x, y)$  を考える。

$f(x, y)$  の 2次元 Fourier 変換を  $F(k_x, k_y)$  とする。 $F(k_x, k_y)$  の、「 $k_x$  軸から角  $\theta$  だけ傾き、原点を通る直線」 $l$ での断面を  $F_\theta(k_r)$  とする。 $k_r$  は  $l$  上にとった座標。

$f(x, y)$  の「 $x$  軸から角  $\theta$  だけ傾いた直線」 $m$  への投影を  $g(s, \theta)$  とする。 $s$  は  $m$  上にとった座標。ここでいう投影とは、「 $m$  上の座標  $s$  の点を通り、 $m$  に垂直な直線」 $n_s$  上の  $f(x, y)$  の値の総和 (すなわち積分) を  $g(s, \theta)$  とすることである。 $g(s, \theta)$  の  $s$  に関する 1次元 Fourier 変換を  $G_\theta(k_s)$  とする。

このとき、「 $F_\theta(k_r)$  と  $G_\theta(k_s)$  は同一の関数である」という定理 (投影定理) が成り立つ。したがって、関数  $g(s, \theta)$  が与えられたとき、Fourier 変換を応用すると、 $f(x, y)$  を求めることができる。

CT は、今日では、X 線を用いて人体の内部を調べる医療技術、CT スキャンとしてよく知られている。人体の各部分の X 線吸収係数を  $f(x, y)$  とすると、X 線発生装置と検出器を人体を挟むように配置し回転させながら撮影を行うことが  $g(s, \theta)$  の測定にあたる。得られた測定値から  $f(x, y)$  を求めれば、それが人体の断面図になるというわけである。

## インパルス応答

線型な系、たとえば自己インダクタンス  $L$  のインダクタと抵抗  $R$  の電気抵抗を直列に接続した電気回路を考えよう。以下の説明では、虚数単位を  $j$  とする。Fourier 変換を表す演算子を  $\mathcal{F}[\dots]$ 、Fourier 逆変換を表す演算子を  $\mathcal{F}^{-1}[\dots]$  とする。

この回路に、時刻 0 に、幅がきわめて小さい  $dt$ 、最大値がきわめて大きい  $\frac{A}{dt}$  のインパルスの電圧  $V_i(t)$  を入力すると、流れる電流  $I_i(t)$  は、 $G(t) = \frac{1}{L} \exp\left[-\frac{R}{L}t\right] \cdot U(t)$  ( $U(t)$  は Heaviside の単位ステップ関数) とおいて

$$I_i(t) = A \cdot G(t) = \frac{A}{L} \exp\left[-\frac{R}{L}t\right] \cdot U(t)$$

である。つまり、立ち上がりで  $\frac{A}{L}$  の電流が発生し、その後は回路の特性にしたがって減衰していく。右辺の  $U(t)$  は、入力が過去に対して影響を与えないことを表している。 $G(t)$  をこの系のインパルス応答関数と呼ぶ。

この回路に、時間で変化する電圧  $V(t)$  を入力したら、流れる電流  $I(t)$  はどうなるであろうか。それは、 $V(t)$  とインパルス応答関数  $G(t)$  の畳み込み積分

$$I(t) = (V * G)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} V(t') \cdot G(t - t') dt'$$

となる。

この表式は、この現象を次のような説明で理解できることを示している。

インパルスを入力した場合の系の応答について述べた上の説明より、時刻  $t'$  に、幅  $dt'$ 、最大値  $V(t')$  のインパルスが入力されたとすると、そのインパルスは時刻  $t$  の系の状態に「 $V(t') dt' \cdot G(t - t')$  の電流」という影響を残すことが導かれる。そこで、回路に  $V(t)$  を入力することを、あらゆる時刻  $t'$  においてこのようなインパルスを入力することと同等と考える。すると、 $I(t)$  は、すべてのインパルスからの時刻  $t$  の系の状態への影響の総和であろう。そのため、上の式のような  $I(t)$  が生じるのである。

いっぽう、この回路に振幅と位相  $\tilde{V}(\omega)$ 、角振動数  $\omega$  の正弦波交流の電圧を入力すると、同じ角振動数  $\omega$  の電流が流れるが、その振幅と位相  $\tilde{I}(\omega)$  は、 $H(\omega) = \frac{1}{R + j\omega L}$  とおいて

$$\tilde{I}(\omega) = \tilde{V}(\omega) \cdot H(\omega) = \frac{1}{R + j\omega L} \cdot \tilde{V}(\omega)$$

である。 $H(\omega)$  は、 $\omega$  に対して入力と応答の比を与える関数とみなせる。 $H(\omega)$  をこの系の周波数応答関数と呼ぶ。

この回路に任意の波形の電圧  $V(t)$  を入力した場合に流れる電流  $I(t)$  は、 $V(t)$  の Fourier 変換を上式の  $\tilde{V}(\omega)$  に代入して得られる  $\tilde{I}(\omega)$  の Fourier 逆変換となる。

以上のように、線型な系の入力と応答の関係は、時間領域におけるインパルス応答関数  $G(t)$ 、周波数領域における周波数応答関数  $H(\omega)$  が存在すれば、完全に規定されてしまう（すべての線型な系にこれらの関数が存在するわけではない）。したがって、どちらかが与えられれば、あらゆる入力に対するその系の応答を知ることができる。

これらの関数  $G(t)$  と  $H(\omega)$  は、互いに Fourier 変換と逆変換の関係になっている。つまり

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \sqrt{2\pi} \cdot \mathcal{F}[G(t)] \\ G(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \mathcal{F}^{-1}[H(\omega)] \end{aligned}$$

である。また、入力から応答を求める演算も、互いに Fourier 変換と逆変換の関係になっている。つまり

$$\begin{aligned} \tilde{I}(\omega) &= \tilde{V}(\omega) \cdot H(\omega) = \mathcal{F}[(V * G)(t)] = \mathcal{F}[I(t)] \\ I(t) &= (V * G)(t) = \mathcal{F}^{-1}[\tilde{V}(\omega) \cdot H(\omega)] = \mathcal{F}^{-1}[\tilde{I}(\omega)] \end{aligned}$$

である。

系の  $G(t)$  を何らかの条件の下で求めたい場合に、一旦、Fourier 変換で周波数領域に移り、 $H(\omega)$  を求めて Fourier 逆変換する、などの応用が可能である。



## 問題 13

時刻を  $t$  とする。

電気抵抗  $R$  の抵抗、自己インダクタンス  $L$  のインダクタ、起電力  $E(t)$  の電源を接続して、図 14 のような回路を作った。

$R = 1.0 \Omega$ 、 $L = 2.0 \times 10^{-2} \text{H}$ 、 $E_0 = 10.0 \text{V}$  とする。

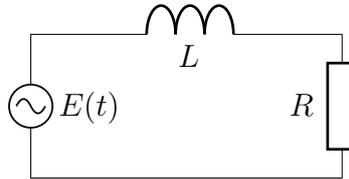


図 14

1.  $E(t)$  が

$$E(t) = \begin{cases} 0 & \left(t < -\frac{D}{2}\right) \\ E_0 & \left(-\frac{D}{2} \leq t \leq \frac{D}{2}\right) \\ 0 & \left(\frac{D}{2} < t\right) \end{cases}$$

で表される場合の、回路を流れる電流  $I(t)$  を求めよ。

$D = 1.0 \times 10^{-2} \text{s}$  とする。

2.  $E(t)$  が

$$E(t) = E_0 \exp\left[-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right]$$

で表される場合の、回路を流れる電流  $I(t)$  を求めよ。

$\sigma = 1.0 \times 10^{-2} \text{s}$  とする。

## 問題 13 の答

虚数単位を  $j$  とする。Fourier 変換を表す演算子を  $\mathcal{F}[\dots]$ 、Fourier 逆変換を表す演算子を  $\mathcal{F}^{-1}[\dots]$  とする。

1.  $I(t)$  の Fourier 変換を  $\tilde{I}(\omega)$  とすると

$$I(t) = \mathcal{F}^{-1} [\tilde{I}(\omega)]$$

である。

$E(t)$  の Fourier 変換を  $\tilde{E}(\omega)$  とし、回路の複素インピーダンスを  $\dot{Z}(\omega)$  とすると

$$\tilde{I}(\omega) = \frac{\tilde{E}(\omega)}{\dot{Z}(\omega)}$$

であり、図 14 の回路の  $\dot{Z}(\omega)$  は

$$\dot{Z}(\omega) = R + j\omega L$$

である。したがって

$$\tilde{I}(\omega) = \frac{\tilde{E}(\omega)}{R + j\omega L}$$

である。

よって

$$\begin{aligned}
 I(t) &= \mathcal{F}^{-1} \left[ \frac{\tilde{E}(\omega)}{R + j\omega L} \right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}^{-1} [\tilde{E}(\omega)] * \mathcal{F}^{-1} \left[ \frac{1}{R + j\omega L} \right] \\
 &= \mathcal{F}^{-1} [\tilde{E}(\omega)] * \mathcal{F}^{-1} \left[ \frac{1}{L} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \left( \frac{R}{L} + j\omega \right)} \right] \\
 &= \frac{1}{L} \cdot \mathcal{F}^{-1} [\tilde{E}(\omega)] * \mathcal{F}^{-1} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi} \left( \frac{R}{L} + j\omega \right)} \right] \\
 &= \frac{1}{L} \cdot E(t) * \left( \exp \left[ -\frac{R}{L} t \right] \cdot U(t) \right) \\
 &= \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{\infty} E(t') \cdot \exp \left[ -\frac{R}{L} (t - t') \right] \cdot U(t - t') dt' \\
 &= \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t E(t') \exp \left[ -\frac{R}{L} (t - t') \right] dt' \\
 &= \begin{cases} 0 & \left( t < -\frac{D}{2} \right) \\ \frac{1}{L} \int_{-\frac{D}{2}}^t E_0 \exp \left[ -\frac{R}{L} (t - t') \right] dt' & \left( -\frac{D}{2} \leq t \leq \frac{D}{2} \right) \\ \frac{1}{L} \int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} E_0 \exp \left[ -\frac{R}{L} (t - t') \right] dt' & \left( \frac{D}{2} < t \right) \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 0 & \left( t < -\frac{D}{2} \right) \\ \frac{E_0}{R} \exp \left[ -\frac{R}{L} t \right] \left( \exp \left[ \frac{R}{L} t \right] - \exp \left[ -\frac{R}{2L} D \right] \right) & \left( -\frac{D}{2} \leq t \leq \frac{D}{2} \right) \\ \frac{E_0}{R} \exp \left[ -\frac{R}{L} t \right] \left( \exp \left[ \frac{R}{2L} D \right] - \exp \left[ -\frac{R}{2L} D \right] \right) & \left( \frac{D}{2} < t \right) \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 0 & \left( t < -\frac{D}{2} \right) \\ \frac{E_0}{R} \left( 1 - \exp \left[ -\frac{R}{L} \left( t + \frac{D}{2} \right) \right] \right) & \left( -\frac{D}{2} \leq t \leq \frac{D}{2} \right) \\ \frac{E_0}{R} \left( 1 - \exp \left[ -\frac{R}{L} D \right] \right) \exp \left[ -\frac{R}{L} \left( t - \frac{D}{2} \right) \right] & \left( \frac{D}{2} < t \right) \end{cases}
 \end{aligned} \tag{18}$$

を得る。

$R = 1.0 \Omega$ 、 $L = 2.0 \times 10^{-2} \text{ H}$ 、 $E_0 = 10.0 \text{ V}$ 、 $D = 2.0 \times 10^{-2} \text{ s}$  を代入した  $I(t)$  と  $E(t)$  のグラフを図 15 に示す。実線のグラフが  $I(t)$ 、破線のグラフが  $E(t)$  である。

また、パラメータの値を変化させて応答の変化を調べたのが図 16 である。上段の 2 枚のグラフは  $R$  を変化させた場合、中段の 2 枚のグラフは  $L$  を変化させた場合、下段の 2 枚のグラフはパルス幅  $D$  を変化させた場合の様子である。

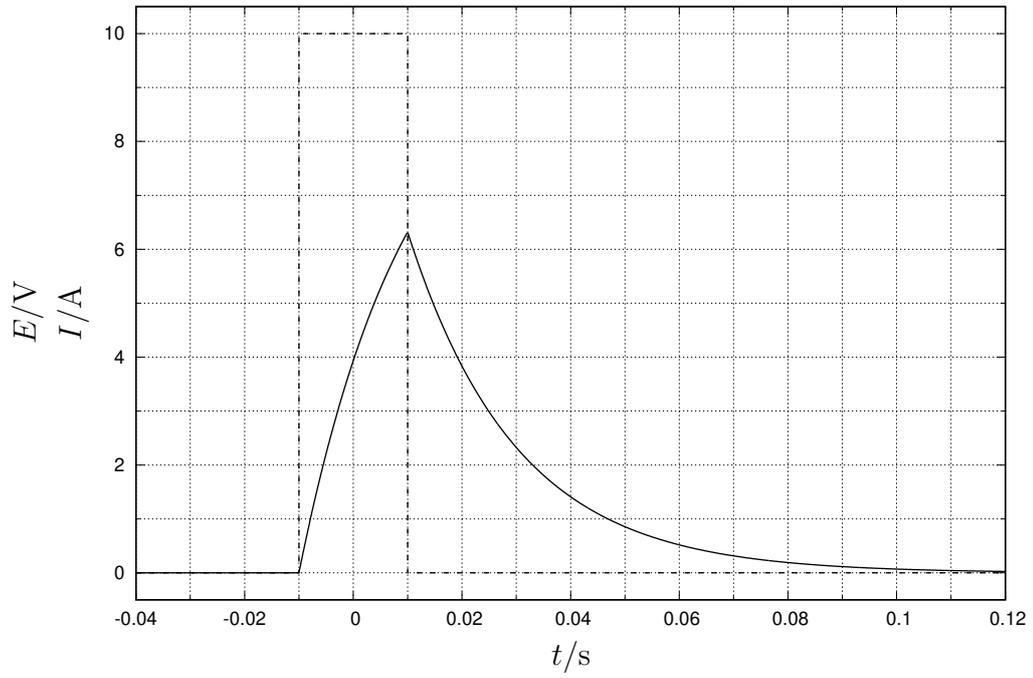


図 15

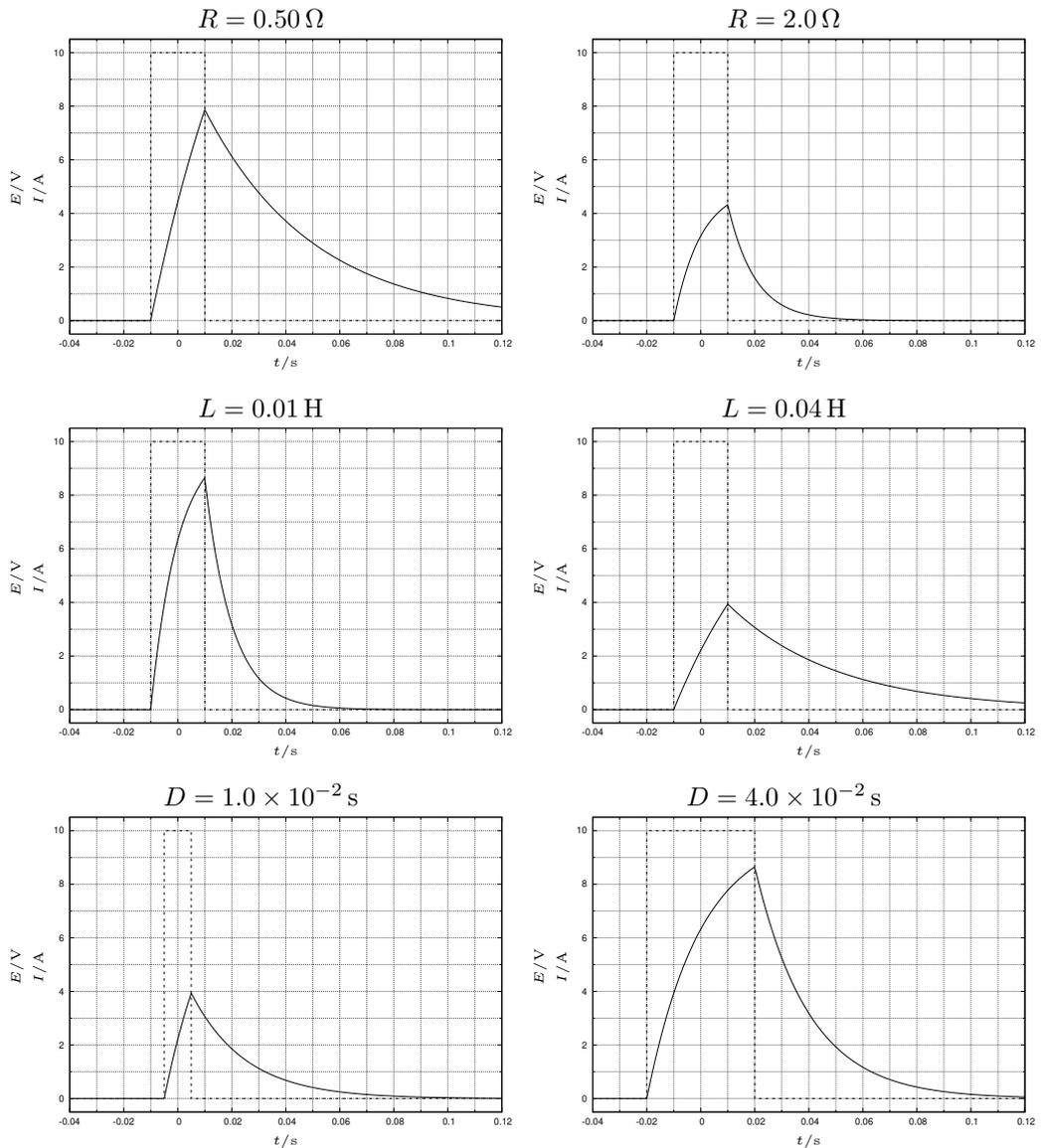


図 16

2. (18) 式から出発する。

$$\begin{aligned}
 I(t) &= \frac{1}{L} \cdot E(t) * \left( \exp \left[ -\frac{R}{L} t \right] \cdot U(t) \right) \\
 &= \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{\infty} E(t') \cdot \exp \left[ -\frac{R}{L} (t-t') \right] \cdot U(t-t') dt' \\
 &= \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t E(t') \cdot \exp \left[ -\frac{R}{L} (t-t') \right] dt' \\
 &= \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t E_0 \exp \left[ -\frac{t'^2}{2\sigma^2} \right] \cdot \exp \left[ -\frac{R}{L} (t-t') \right] dt' \\
 &= \frac{E_0}{L} \exp \left[ -\frac{R}{L} t \right] \int_{-\infty}^t \exp \left[ -\frac{t'^2}{2\sigma^2} \right] \cdot \exp \left[ \frac{R}{L} t' \right] dt' \\
 &= \frac{E_0}{L} \exp \left[ -\frac{R}{L} t \right] \int_{-\infty}^t \exp \left[ -\frac{t'^2}{2\sigma^2} + \frac{R}{L} t' \right] dt' \\
 &= \frac{E_0}{L} \exp \left[ -\frac{R}{L} t \right] \int_{-\infty}^t \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{t'}{\sigma} - \frac{\sigma R}{L} \right)^2 + \frac{\sigma^2 R^2}{2L^2} \right] dt' \\
 &= \frac{E_0}{L} \exp \left[ -\frac{R}{L} t + \frac{\sigma^2 R^2}{2L^2} \right] \int_{-\infty}^t \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{t'}{\sigma} - \frac{\sigma R}{L} \right)^2 \right] dt' \\
 &= \frac{E_0}{L} \exp \left[ -\frac{R}{L} \left( t - \frac{\sigma^2 R}{2L} \right) \right] \int_{-\infty}^t \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{t'}{\sigma} - \frac{\sigma R}{L} \right)^2 \right] dt'
 \end{aligned}$$

$p = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{t'}{\sigma} - \frac{\sigma R}{L} \right)$  と変数変換すると

$$\begin{aligned}
 &= \frac{E_0}{L} \exp \left[ -\frac{R}{L} \left( t - \frac{\sigma^2 R}{2L} \right) \right] \int_{-\infty}^{\frac{t}{\sigma} - \frac{\sigma R}{L}} \exp[-p^2] \cdot \sqrt{2} \sigma dp \\
 &= \frac{\sqrt{2} \sigma E_0}{L} \exp \left[ -\frac{R}{L} \left( t - \frac{\sigma^2 R}{2L} \right) \right] \int_{-\infty}^{\frac{t}{\sigma} - \frac{\sigma R}{L}} \exp[-p^2] dp \\
 &= \frac{\sqrt{2} \sigma E_0}{L} \exp \left[ -\frac{R}{L} \left( t - \frac{\sigma^2 R}{2L} \right) \right] \left( \int_{-\infty}^0 \exp[-p^2] dp + \int_0^{\frac{t}{\sigma} - \frac{\sigma R}{L}} \exp[-p^2] dp \right)
 \end{aligned}$$

2つに分けた積分の1つ目は Gauss 積分で  $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ 、2つ目は 誤差関数

$$\operatorname{erf}[t] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \exp[-t'^2] dt'$$

を用いれば  $\frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf} \left[ \frac{t}{\sigma} - \frac{\sigma R}{L} \right]$  であるから、結局

$$I(t) = \frac{\sqrt{2\pi} \sigma E_0}{2L} \exp \left[ -\frac{R}{L} \left( t - \frac{\sigma^2 R}{2L} \right) \right] \left( 1 + \operatorname{erf} \left[ \frac{t}{\sigma} - \frac{\sigma R}{L} \right] \right)$$

を得る。

$R = 1.0 \Omega$ 、 $L = 2.0 \times 10^{-2} \text{ H}$ 、 $E_0 = 10.0 \text{ V}$ 、 $\sigma = 1.0 \times 10^{-2} \text{ s}$  を代入した  $I(t)$  と  $E(t)$  のグラフを図 17 に示す。実線のグラフが  $I(t)$ 、破線のグラフが  $E(t)$  である。

また、パラメータの値を変化させて応答の変化を調べたのが図 18 である。上段の 2 枚のグラフは  $R$  を変化させた場合、中段の 2 枚のグラフは  $L$  を変化させた場合、下段の 2 枚のグラフは パルス幅  $\sigma$  を変化させた場合の様子である。

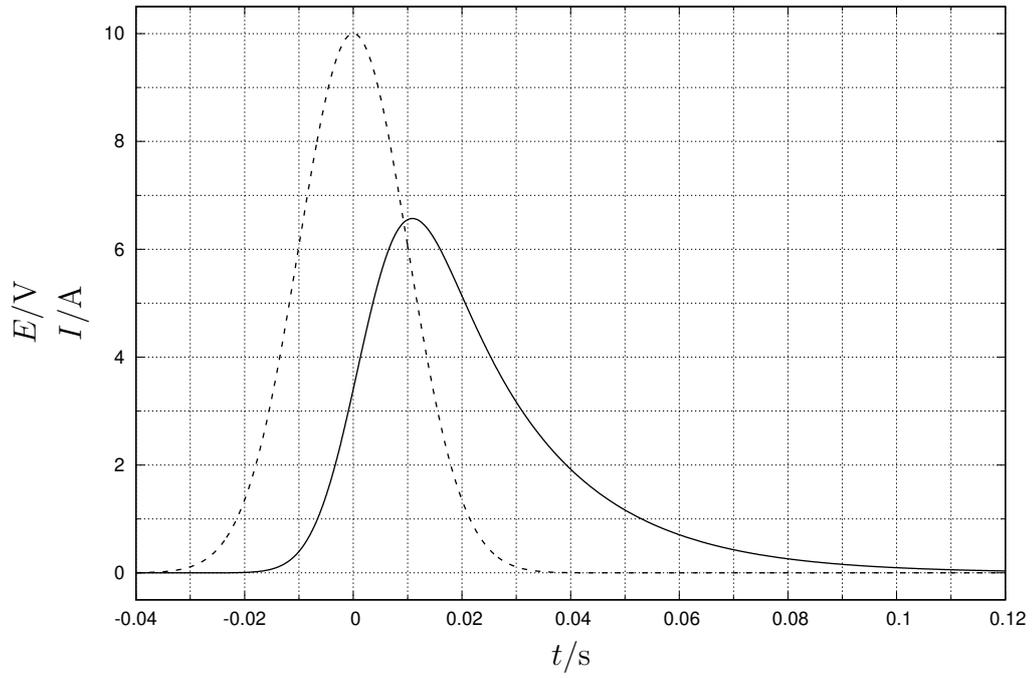


図 17

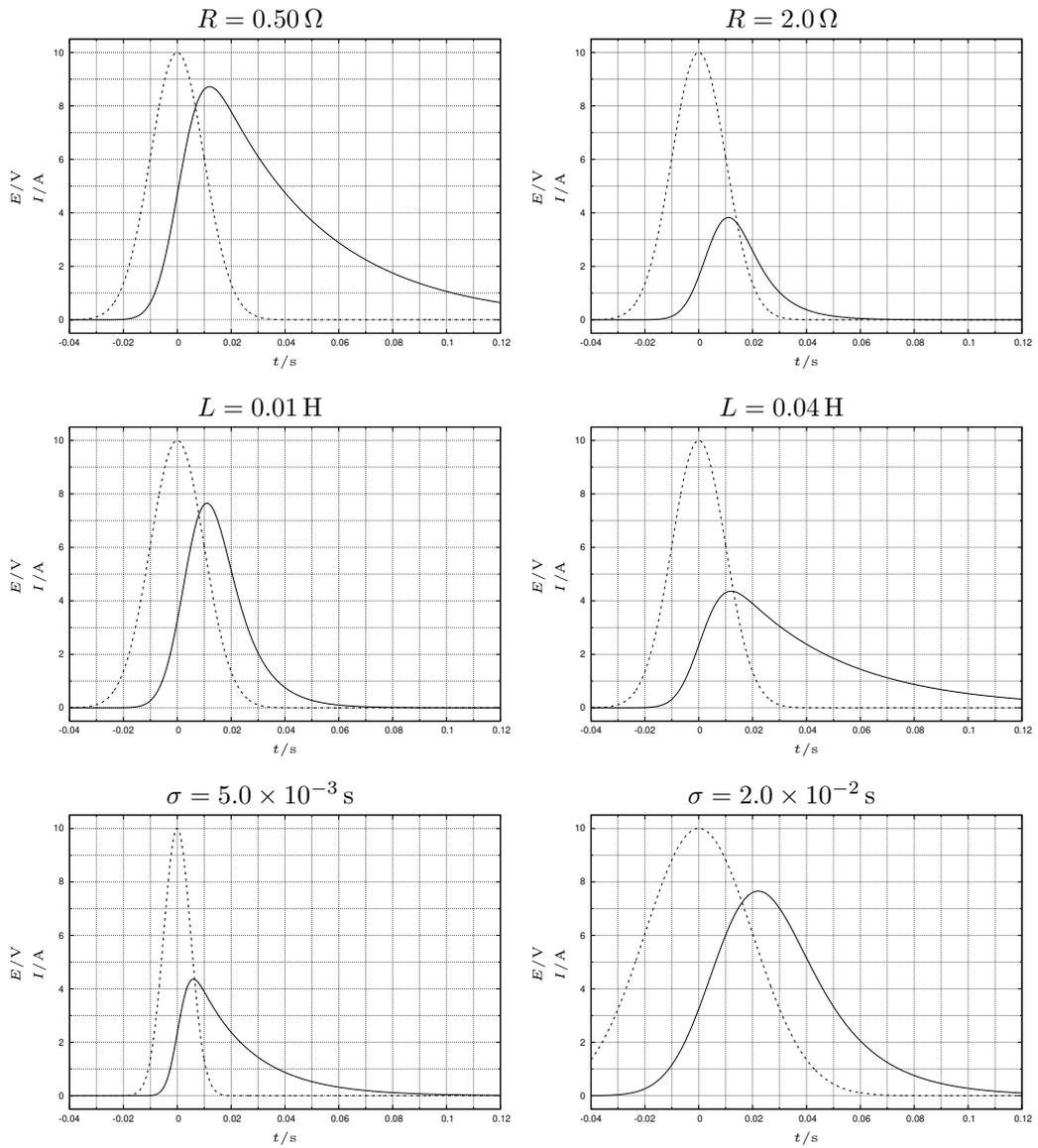


図 18

## 問題 14

微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 5x = f(t) \quad (19)$$

を満たす関数  $x(t)$  を求めよ。 $f(t)$  は

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 1 & (0 \leq t < 3\pi) \\ 0 & (3\pi \leq t) \end{cases}$$

とする。



## 問題 14 の答

虚数単位を  $i$  とする。Fourier 変換を表す演算子を  $\mathcal{F}[\dots]$ 、Fourier 逆変換を表す演算子を  $\mathcal{F}^{-1}[\dots]$  とする。 $\mathcal{F}[x(t)]$  を  $X(\omega)$ 、 $\mathcal{F}[f(t)]$  を  $F(\omega)$  とする。

(19) 式の両辺を Fourier 変換する。

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 5x\right] &= \mathcal{F}[f(t)] \\ \mathcal{F}\left[\frac{d^2x}{dt^2}\right] + 2\mathcal{F}\left[\frac{dx}{dt}\right] + 5\mathcal{F}[x] &= \mathcal{F}[f(t)] \\ (i\omega)^2 X(\omega) + 2(i\omega)X(\omega) + 5X(\omega) &= F(\omega)\end{aligned}$$

$X(\omega)$  について解く。

$$\begin{aligned}-\omega^2 X(\omega) + i2\omega X(\omega) + 5X(\omega) &= F(\omega) \\ -(\omega^2 - i2\omega - 5)X(\omega) &= F(\omega) \\ X(\omega) &= -\frac{1}{\omega^2 - i2\omega - 5}F(\omega)\end{aligned}$$

両辺を Fourier 逆変換する。

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}[X(\omega)] &= \mathcal{F}^{-1}\left[-\frac{1}{\omega^2 - i2\omega - 5}F(\omega)\right] \\ x(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}^{-1}\left[-\frac{1}{\omega^2 - i2\omega - 5}\right] * f(t) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}^{-1}\left[-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\omega - i - 2} - \frac{1}{\omega - i + 2}\right)\right] * f(t) \\ &= -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{\omega - i - 2}\right] - \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{\omega - i + 2}\right]\right) * f(t) \\ &= -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{i\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}(1 + i(\omega - 2))}\right] - \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{i\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}(1 + i(\omega + 2))}\right]\right) * f(t) \\ &= -\frac{i}{4}\left(\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}(1 + i(\omega - 2))}\right] - \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}(1 + i(\omega + 2))}\right]\right) * f(t) \\ &= -\frac{i}{4}\left(\exp[i2t] \cdot \exp[-t] \cdot U(t) - \exp[-i2t] \cdot \exp[-t] \cdot U(t)\right) * f(t) \\ &= -\frac{i}{4}\left(\left(\exp[-(1 - i2)t] - \exp[-(1 + i2)t]\right) \cdot U(t)\right) * f(t) \\ &= -\frac{i}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\exp[-(1 - i2)t'] - \exp[-(1 + i2)t']\right) \cdot U(t') \cdot f(t - t') dt' \\ &= -\frac{i}{4}\int_{t-3\pi}^t\left(\exp[-(1 - i2)t'] - \exp[-(1 + i2)t']\right) \cdot U(t') dt'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ -\frac{i}{4} \int_0^t \left( \exp[-(1-i2)t'] - \exp[-(1+i2)t'] \right) dt' & (0 \leq t < 3\pi) \\ -\frac{i}{4} \int_{t-3\pi}^t \left( \exp[-(1-i2)t'] - \exp[-(1+i2)t'] \right) dt' & (3\pi \leq t) \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ -\frac{i}{4} \left[ -\frac{\exp[-(1-i2)t']}{1-i2} + \frac{\exp[-(1+i2)t']}{1+i2} \right]_0^t & (0 \leq t < 3\pi) \\ -\frac{i}{4} \left[ -\frac{\exp[-(1-i2)t']}{1-i2} + \frac{\exp[-(1+i2)t']}{1+i2} \right]_{t-3\pi}^t & (3\pi \leq t) \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ -\frac{i}{4} \left( -\frac{\exp[-(1-i2)t]}{1-i2} + \frac{\exp[-(1+i2)t]}{1+i2} + \frac{1}{1-i2} - \frac{1}{1+i2} \right) & (0 \leq t < 3\pi) \\ -\frac{i}{4} \left( -\frac{\exp[-(1-i2)t]}{1-i2} + \frac{\exp[-(1+i2)t]}{1+i2} \right. \\ \quad \left. + \frac{\exp[-(1-i2)(t-3\pi)]}{1-i2} - \frac{\exp[-(1+i2)(t-3\pi)]}{1+i2} \right) & (3\pi \leq t) \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ \frac{1}{5} \left( 1 - \exp[-t] \left( \cos[2t] + \frac{1}{2} \sin[2t] \right) \right) & (0 \leq t < 3\pi) \\ \frac{1}{5} \left( -\exp[-t] \left( \cos[2t] + \frac{1}{2} \sin[2t] \right) \right. \\ \quad \left. + \exp[-(t-3\pi)] \left( \cos[2(t-3\pi)] + \frac{1}{2} \sin[2(t-3\pi)] \right) \right) & (3\pi \leq t) \end{cases}
\end{aligned}$$

これが解である。

得られた  $x(t)$  のグラフを図 19 に示す。

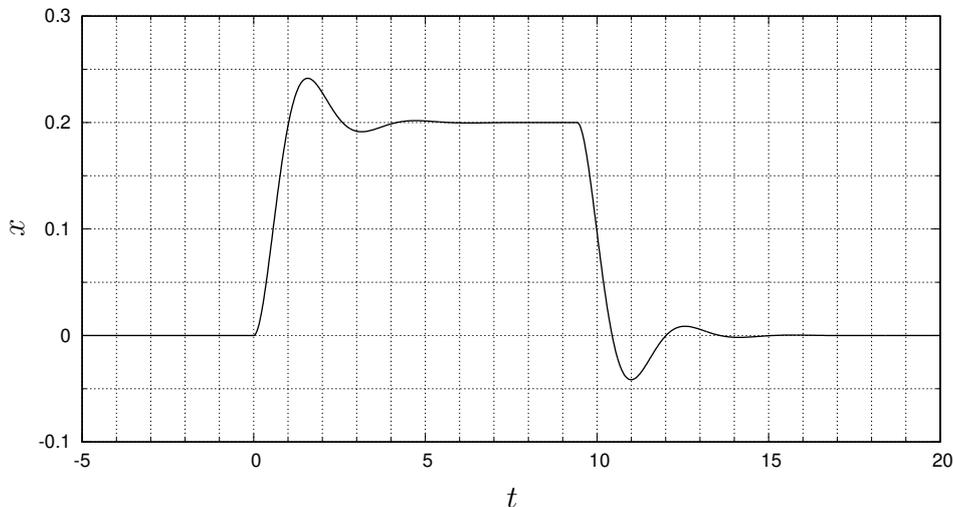


図 19

## 問題 15

音声を電波に載せて伝送する、ラジオ放送について考える。

放送局は、高い角振動数  $\omega_c$  の単振動を加工して音の波形  $f(t)$  の情報を持たせた電気信号を作り、それを電波として空中に送信する。この信号を作る操作を、**変調**と呼ぶ。角振動数  $\omega_c$  の正弦波の電波を、**搬送波**と呼ぶ。

受信機は、送信された電波を電気信号として受け取る。そこから、 $f(t)$  を電気信号として取り出す。それをスピーカーに流せば、放送局が送信した音を聞くことができる。受け取った信号から  $f(t)$  の信号を取り出す操作を、**検波**と呼ぶ。

変調には様々な方式が存在するが、ここでは、**振幅変調 (Amplitude Modulation, AM)** 方式を取りあげる。振幅変調方式では、単振動の振幅を音の波形に置き換える。つまり、変調された信号  $v(t)$  は

$$v(t) = f(t) \cos[\omega_c t]$$

となる。

振幅変調された信号の検波には、これまた、様々な方式が存在する。ここでは、**同期検波**を取りあげる。同期検波では、乗算回路を使って、 $v(t)$  に  $\cos[\omega_c t]$  を乗じた電気信号を作る。つまり

$$u(t) = f(t) \cos^2[\omega_c t]$$

なる信号を作る。これをローパスフィルタに通して低い振動数の成分だけを取り出すと、 $f(t)$  が電気信号として得られる。

可聴音は、振動数がおよそ 20 Hz から 20 kHz までの範囲の振動である。日本の電波法の施行規則では、AM ラジオ放送は最大 7.5 kHz までの振動数の音を送信すると定められている。

AM ラジオ放送の搬送波としては、振動数 ( $= \frac{\omega_c}{2\pi}$ 、これを  $\nu_c$  とおく) 300 kHz から 3 MHz までの範囲の電波 (中波) が使われる。たとえば、NHK の東京の放送局では、NHK 第一放送の搬送波として振動数 594 kHz の電波を使い、NHK 第二放送の搬送波として 693 kHz の電波を使っている。

AM ラジオ放送で伝送する音声信号について考える。

1.  $f(t)$  の Fourier 変換を  $F(\omega)$  とする。

$|F(\omega)|$  のグラフの概形について、必ず言えることを 2 つ指摘し、図で表しなさい。

AM 方式の変調について考える。

2.  $v(t)$  の Fourier 変換を求めなさい。
3.  $v(t)$  の性質について単純化して考えるときには、 $v(t)$  を「振幅は一定でないが、振動数は  $\nu_c$  で一定の振動」とみなすことがある。しかし、厳密には、この考えは正しくない。 $v(t)$  は、 $\nu_c$  以外の振動数の振動も含んでいる。

$v(t)$  は、どのような範囲の振動数の振動を含むか。

複数の AM ラジオ放送の電波を同時に受信する場合について考える。

4. 2 つの AM ラジオ放送が同時に行われる場合に、両者の電波を分離して受信できるようにするためには、搬送波の振動数を、少なくともどれだけ離す必要があるか。

AM ラジオ放送の同期検波について考える。

5.  $u(t)$  の Fourier 変換を求めなさい。
6.  $u(t)$  を適切なローパスフィルタに通すと、 $f(t)$  が得られる。

このローパスフィルタを次のようなものと仮定して、 $\nu_0$  がいくらであればよいかを答えなさい。

「振動数が  $\nu_0$  より大きい振動の振幅を 0 にし、振動数が  $\nu_0$  より小さい振動の振幅を変化させない」

## 問題 15 の答

振動数 7.5 kHz を  $\nu_m$  とおき、それを角振動数に換算した値  $2\pi\nu_m$  を  $\omega_m$  とおく。  
虚数単位を  $i$  とする。Fourier 変換を表す演算子を  $\mathcal{F}[\dots]$  とする。

1. Fourier 変換の基本的な性質により、 $F(-\omega) = \overline{F(\omega)}$  が成り立つ。よって、 $|F(-\omega)| = |F(\omega)|$  である。すなわち、 $|F(\omega)|$  のグラフは、縦軸を中心に左右対称となる。

また、 $f(t)$  が含むのは最大  $\nu_m$  までの振動数の音だけであるから、 $|\omega| > \omega_m$  の範囲では  $F(\omega) = 0$  である。  
以上 2 つのことが必ず言える。これを図で表すと、図 20 になる。

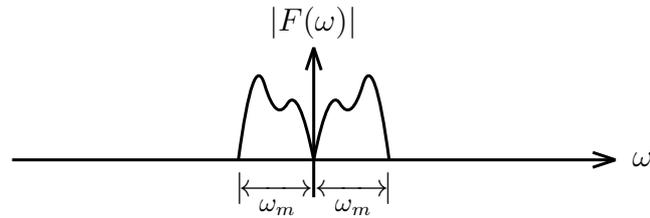


図 20

2.  $v(t)$  の Fourier 変換を  $V(\omega)$  とする。

$$\begin{aligned}
 V(\omega) &= \mathcal{F}[v(t)] \\
 &= \mathcal{F}[f(t) \cos[\omega_c t]] \\
 &= \mathcal{F}\left[f(t) \cdot \frac{1}{2} (\exp[i\omega_c t] + \exp[-i\omega_c t])\right] \\
 &= \frac{1}{2} \left( \mathcal{F}[\exp[i\omega_c t] \cdot f(t)] + \mathcal{F}[\exp[-i\omega_c t] \cdot f(t)] \right) \\
 &= \frac{1}{2} (F(\omega - \omega_c) + F(\omega + \omega_c))
 \end{aligned} \tag{20}$$

となる。

よって、 $V(\omega)$  は、 $F(\omega)$  を  $\omega = \omega_c$  が中心になるよう平行移動させたものと、 $F(\omega)$  を  $\omega = -\omega_c$  が中心になるよう平行移動させたものとの重ね合わせになる。

参考のために、 $|V(\omega)|$  のグラフを図 21 に示す。

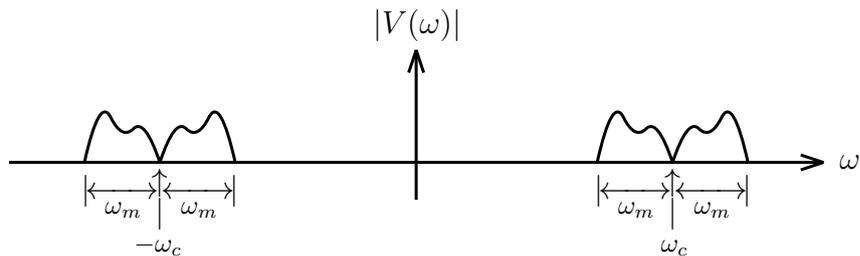


図 21

3.  $F(-\omega) = \overline{F(\omega)}$  であることに注意して (20) 式の性質を考えると

$$V(-\omega) = \overline{V(\omega)} \quad (21)$$

が成り立つことがわかる。(21) 式が成り立っているとき、 $v(t)$  に含まれる角振動数  $\omega$  の振動の振幅は、 $2|V(\omega)|$  で与えられる。

$F(\omega)$  が  $|\omega| \leq \omega_m$  の範囲でだけ 0 でない値を持つことに注意して (20) 式の性質を考えると、 $V(\omega)$  は

$$\omega_c - \omega_m \leq |\omega| \leq \omega_c + \omega_m$$

の範囲でだけ 0 でない値を持つことがわかる。

以上より、 $v(t)$  は  $\omega_c - \omega_m$  から  $\omega_c + \omega_m$  までの範囲の角振動数の振動を含んでいることがわかる。振動数に換算すれば、 $\nu_c - \nu_m$  から  $\nu_c + \nu_m$  までの範囲である。

たとえば、NHK の東京の放送局が送信する NHK 第一放送の変調された信号は 586.5 kHz から 601.5 kHz まで、同じく NHK 第二放送の変調された信号は 685.5 kHz から 700.5 kHz までの振動数の振動を含む。

4. 2つの放送 1 と 2 があるとし、両者の搬送波の振動数をそれぞれ  $\nu_1$ 、 $\nu_2$  とする。 $\nu_1 < \nu_2$  とする。

前問の考察によれば、放送 1 の信号には最大  $\nu_1 + \nu_m$  までの振動数の振動が含まれ、放送 2 の信号には最小  $\nu_2 - \nu_m$  からの振動数の振動が含まれる。したがって、 $\nu_2$  が  $\nu_1$  よりも  $2\nu_m$  以上大きくなければ、一部の振動数の振動は、2つの信号の両方に含まれることになる。そうなると、2つの放送の電波を分離して受信することはできない。

ゆえに、2つの AM ラジオ放送の電波を分離して受信できるようにするためには、両者の搬送波の振動数を、少なくとも  $2\nu_m$ 、すなわち 15 kHz だけ離す必要がある。

国際電気通信連合は、アジア地域において AM ラジオ放送の搬送波に使える振動数を 531 kHz から 1602 kHz までの 9 kHz 間隔の値と定めている。この間隔は 15 kHz よりも狭い。そのため、日本において、互いに隣り合う搬送波を使った 2つの放送を、同一または近隣の放送局で同時に行うと、それらを分離して受信することができず、混ざって聞こえる現象（混信）が起こる。

5.  $u(t)$  の Fourier 変換を  $U(\omega)$  とする。

$$\begin{aligned}
 U(\omega) &= \mathcal{F}[u(t)] \\
 &= \mathcal{F}[f(t) \cos^2[\omega_c t]] \\
 &= \mathcal{F}\left[f(t) \cdot \frac{1}{2} (1 + \cos[2\omega_c t])\right] \\
 &= \mathcal{F}\left[f(t) \cdot \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} (\exp[i2\omega_c t] + \exp[-i2\omega_c t])\right)\right] \\
 &= \frac{1}{2} \mathcal{F}[f(t)] + \frac{1}{4} \mathcal{F}[\exp[i2\omega_c t] \cdot f(t)] + \frac{1}{4} \mathcal{F}[\exp[-i2\omega_c t] \cdot f(t)] \\
 &= \frac{1}{2} F(\omega) + \frac{1}{4} F(\omega - 2\omega_c) + \frac{1}{4} F(\omega + 2\omega_c)
 \end{aligned} \tag{22}$$

となる。

よって、 $U(\omega)$  は、 $F(\omega)$  と、 $F(\omega)$  を  $\omega = 2\omega_c$  が中心になるよう平行移動させたものと、 $F(\omega)$  を  $\omega = -2\omega_c$  が中心になるよう平行移動させたものとの重ね合わせになる。

参考のために、 $|U(\omega)|$  のグラフを図 22 に示す。

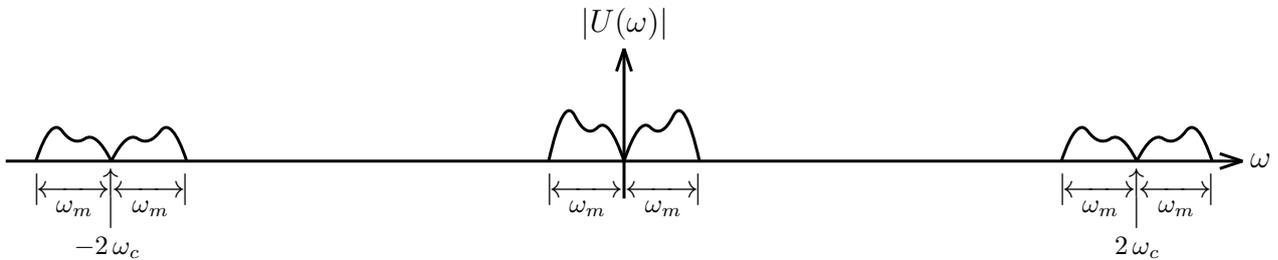


図 22

6. 振動数  $\nu_0$  を角振動数に換算した値  $2\pi\nu_0$  を  $\omega_0$  とおく。

(22) 式の第 2 項と第 3 項の和を  $Q(\omega)$ 、その Fourier 逆変換を  $q(t)$  として、(22) 式を Fourier 逆変換すると

$$u(t) = \frac{1}{2} f(t) + q(t)$$

を得る。

したがって、ローパスフィルタで  $q(t)$  だけを  $u(t)$  から取り除くことができれば、 $f(t)$  が得られる。そのためには、 $f(t)$  が含む最大の振動数よりも  $q(t)$  が含む最小の振動数のほうが大きい必要があるが、AM ラジオ放送の仕様では、ふつう、それは満たされているので、両者の間の値に  $\nu_0$  をすればよい。

まず、 $f(t)$  は最大  $\nu_m$  までの振動数の振動を含む。

いっぽう、 $q(t)$  は  $2\omega_c - \omega_m$  から  $2\omega_c + \omega_m$  までの範囲の角振動数の振動を含む（設問 3. と同様の考察から言える）。振動数に換算すれば、 $2\nu_c - \nu_m$  から  $2\nu_c + \nu_m$  までである。

以上より、 $f(t)$  を得るには、 $\nu_0$  を

$$\nu_m < \nu_0 < 2\nu_c - \nu_m$$

を満たす値にすればよいことがわかる。

たとえば、NHK の東京の放送局が送信する NHK 第一放送の信号を検波するには 7.5 kHz から 1180.5 kHz までの間、同じく NHK 第二放送の信号を検波するには 7.5 kHz から 1378.5 kHz までの間の値に、 $\nu_0$  をすればよい。

## 問題 16

時刻を  $t$  とする。光の速さを  $c$  とする。

光の透過率が場所によって異なる薄い平面の板（回折格子） $G$  がある。 $G$  の面上に座標原点  $O$  をとり、 $G$  に垂直に  $z$  軸、 $G$  上に  $x$  軸と  $y$  軸をとる。 $G$  上の座標  $(x, y, 0)$  の点の振幅透過率は、 $x$  だけの関数  $f(x)$  であるとする。振幅透過率は、光が物体を透過することにより電場の振幅が何倍になるかを表す量である。

波長  $\lambda$  の単色光が、 $z$  軸に平行に、 $z$  の負の側から  $G$  に入射する。 $z = 0$  におけるこの光の電場を  $E_{\text{in}}(t)$  とすると

$$E_{\text{in}}(t) = E_0 \cos \left[ \frac{2\pi c}{\lambda} t \right]$$

( $E_0$  は定数) である。

- $E_{\text{in}}(t)$  の複素表示を  $\dot{E}_{\text{in}}(t)$  とする。実部が実際に観測されるものとして、 $\dot{E}_{\text{in}}(t)$  の表式を書け。
- 座標  $(x, 0, 0)$  の点における、 $G$  を透過した直後の光の電場の複素表示を  $\dot{E}_{\text{tr}}(x, t)$  とする。 $\dot{E}_{\text{tr}}(x, t)$  を求めよ。

$G$  を透過した光は、 $z > 0$  の領域に回折して伝播する。ここでは、 $y$  軸に垂直な面内の回折角  $\theta$  の回折光について考える。 $\theta$  の符号については、 $x > 0$  の側への回折を正の  $\theta$  で表し、 $x < 0$  の側への回折を負の  $\theta$  で表すものとする。

座標  $(r \sin \theta, 0, r \cos \theta)$  の点を  $P$  とする。座標  $(x, 0, 0)$  の位置にある、 $x$  方向の幅  $dx$ 、 $y$  方向の幅  $dy$  の、 $G$  上の面積素片を  $Q$  とする。 $f(x)$  が 0 でない値を持つ  $x$  の絶対値の上限  $x_{\text{max}}$  について、 $x_{\text{max}} \ll r$  が成り立つとする。

- $Q$  を通って  $G$  を透過した光がそこから  $P$  まで伝播するのにかかる時間  $t_1$  を求めよ。

$Q$  を通って  $G$  を透過した光の  $P$  における電場の複素表示を  $\dot{E}_{\text{se}}(\theta, x, r, t)$  とする。これは、 $\dot{E}_{\text{tr}}(x, t)$  が  $t_1$  だけ時間をかけて伝わることにより生じるのだから、 $t$  の関数としては  $\dot{E}_{\text{tr}}(x, t - t_1)$  に等しいはずである。よって、 $\dot{E}_{\text{se}}(\theta, x, r, t)$  は、 $t$  によらない係数  $\alpha$  と  $\dot{E}_{\text{tr}}(x, t - t_1)$  との積になると考えられる。 $\alpha$  は、Kirchhoff の回折理論によれば

$$\alpha = \frac{1}{i \lambda r} \cdot \frac{1 + \cos \theta}{2} dx dy$$

である。

- Kirchhoff の回折理論にもとづいて  $\dot{E}_{\text{se}}(\theta, x, r, t)$  を求めよ。 $\frac{1 + \cos \theta}{2}$  は、 $g(\theta)$  とおいてよい。

$G$  上の、 $x$  軸に平行な、幅  $dy$  の帯状の領域を考える。 $y = 0$  の位置にあるこのような領域を  $B_0$  とする。 $B_0$  を通って  $G$  を透過した光の  $P$  における電場の複素表示を  $\dot{E}(\theta, r, t)$  とする。

- あらゆる  $x$  に対する  $\dot{E}_{\text{se}}(\theta, x, r, t)$  の総和として、 $\dot{E}(\theta, r, t)$  を求めよ。積分の形で答えよ。
- $f(x)$  の Fourier 変換を  $F(k)$  とする。 $F$  を用いて  $\dot{E}(\theta, r, t)$  を表せ。

光の回折の実験では、回折角  $\theta$  の回折光の強度を測定することができる。

電場  $E(t)$  の光の強度  $S$  は、真空の透磁率を  $\mu_0$  として

$$S = \frac{1}{\mu_0 c} \times \left( E(t) \text{ の振幅} \right)^2$$

で与えられる。これは、 $E(t)$  の複素表示を  $\dot{E}(t)$  とすれば

$$S = \frac{1}{\mu_0 c} \left| \dot{E}(t) \right|^2$$

と表すこともできる。

- $B_0$  を通って  $G$  を透過した光の  $P$  における強度を  $S(\theta, r)$  とする。 $S(\theta, r)$  を求めよ。
- $z = 0$  における入射光の強度を  $S_{\text{in}}$  とすると、 $S(\theta, r)$  を、 $\theta$  の関数  $D(\theta)$  を使って

$$S(\theta, r) = \left( g(\theta) \right)^2 \cdot \frac{S_{\text{in}} \cdot D(\theta)}{r^2} \cdot \left( \frac{dy}{\lambda} \right)^2$$

と表せる。 $D(\theta)$  を求めよ。

$G$  が「光を通さない板に小さな穴があいたもの」であるとする。穴の、 $y = 0$  における  $x$  方向の幅を  $d$  とする。

- この場合の  $D(\theta)$  を求めよ。

## 問題 16 の答

虚数単位を  $i$  とする。

1.

$$\dot{E}_{\text{in}}(t) = E_0 \exp \left[ i \frac{2\pi c}{\lambda} t \right]$$

2.

$$\begin{aligned} \dot{E}_{\text{tr}}(x, t) &= f(x) \cdot \dot{E}_{\text{in}}(t) \\ &= E_0 f(x) \exp \left[ i \frac{2\pi c}{\lambda} t \right] \end{aligned}$$

3. Q から P までの距離を  $R$  とする。

$x_{\text{max}} \ll r$  であるから、 $x \ll r$  である。それゆえ線分 OP と線分 QP を平行とみなすと、線分 QP の長さは線分 OP の長さよりも  $x \sin \theta$  だけ短いと考えられる。線分 OP の長さは  $r$  である。よって

$$R = r - x \sin \theta$$

である。

この距離  $R$  を速さ  $c$  で光が伝わる。したがって、光が Q から P まで伝播するのにかかる時間  $t_1$  は

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{R}{c} \\ &= \frac{1}{c} (r - x \sin \theta) \end{aligned}$$

である。

4. Kirchhoff の回折理論に従うと

$$\begin{aligned} \dot{E}_{\text{se}}(\theta, x, r, t) &= \alpha \cdot \dot{E}_{\text{tr}}(x, t - t_1) \\ &= \left( \frac{1}{i \lambda r} g(\theta) dx dy \right) \cdot \left( E_0 f(x) \exp \left[ i \frac{2\pi c}{\lambda} (t - t_1) \right] \right) \\ &= \frac{1}{i \lambda r} E_0 g(\theta) f(x) \exp \left[ i \frac{2\pi c}{\lambda} (t - t_1) \right] dx dy \\ &= \frac{1}{i \lambda r} E_0 g(\theta) f(x) \exp \left[ i \frac{2\pi}{\lambda} (ct - r + x \sin \theta) \right] dx dy \end{aligned}$$

である。

5.  $\dot{E}(\theta, r, t)$  は、あらゆる  $x$  に対する  $\dot{E}_{\text{se}}(\theta, x, r, t)$  の総和である。

$$\begin{aligned}\dot{E}(\theta, r, t) &= \int_{x=-\infty}^{\infty} \dot{E}_{\text{se}}(\theta, x, r, t) \\ &= \int_{x=-\infty}^{\infty} \frac{1}{i\lambda r} E_0 g(\theta) f(x) \exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda}(ct-r+x\sin\theta)\right] dx dy \\ &= \frac{1}{i\lambda r} E_0 g(\theta) \exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda}(ct-r)\right] dy \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda}x\sin\theta\right] dx\end{aligned}$$

6.

$$k = -\frac{2\pi}{\lambda} \sin\theta$$

とおくと

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda}x\sin\theta\right] dx &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp[-ikx] dx \\ &= \sqrt{2\pi} F(k) \\ &= \sqrt{2\pi} F\left(-\frac{2\pi}{\lambda} \sin\theta\right)\end{aligned}$$

であるから、前問の結論より

$$\dot{E}(\theta, r, t) = \sqrt{2\pi} \frac{1}{i\lambda r} E_0 g(\theta) \exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda}(ct-r)\right] dy \cdot F\left(-\frac{2\pi}{\lambda} \sin\theta\right)$$

である。

7.

$$\begin{aligned}S(\theta, r) &= \frac{1}{\mu_0 c} \left| \dot{E}(\theta, r, t) \right|^2 \\ &= \frac{1}{\mu_0 c} \cdot \left| \sqrt{2\pi} \frac{1}{i\lambda r} E_0 g(\theta) \exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda}(ct-r)\right] dy \cdot F\left(-\frac{2\pi}{\lambda} \sin\theta\right) \right|^2 \\ &= \frac{1}{\mu_0 c} \cdot 2\pi \cdot \left(\frac{1}{\lambda r}\right)^2 \cdot E_0^2 \cdot (g(\theta))^2 \cdot dy^2 \cdot \left| F\left(-\frac{2\pi}{\lambda} \sin\theta\right) \right|^2 \cdot \left| \frac{1}{i} \exp\left[i\frac{2\pi}{\lambda}(ct-r)\right] \right|^2 \\ &= 2\pi \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cdot \left(\frac{dy}{\lambda r}\right)^2 \cdot (g(\theta))^2 \cdot \left| F\left(-\frac{2\pi}{\lambda} \sin\theta\right) \right|^2\end{aligned}$$

8.  $D(\theta)$  は

$$D(\theta) = \frac{S(\theta, r)}{\left(g(\theta)\right)^2 \cdot \frac{S_{\text{in}}}{r^2} \cdot \left(\frac{dy}{\lambda}\right)^2}$$

である。

$S(\theta, r)$  は、前問の結論である。  $S_{\text{in}}$  は

$$\begin{aligned} S_{\text{in}} &= \frac{1}{\mu_0 c} \cdot \left| \dot{E}_{\text{in}}(t) \right|^2 \\ &= \frac{1}{\mu_0 c} \cdot \left| E_0 \exp \left[ i \frac{2\pi c}{\lambda} t \right] \right|^2 \\ &= \frac{1}{\mu_0 c} \cdot E_0^2 \cdot \left| \exp \left[ i \frac{2\pi c}{\lambda} t \right] \right|^2 \\ &= \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \end{aligned}$$

である。

以上を合わせると

$$\begin{aligned} D(\theta) &= \frac{2\pi \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cdot \left(\frac{dy}{\lambda r}\right)^2 \cdot \left(g(\theta)\right)^2 \cdot \left| F \left( -\frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta \right) \right|^2}{\left(g(\theta)\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{r^2} \cdot \frac{E_0^2}{\mu_0 c}\right) \cdot \left(\frac{dy}{\lambda}\right)^2} \\ &= 2\pi \left| F \left( -\frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta \right) \right|^2 \end{aligned}$$

である。

9. 穴の、 $y = 0$  における  $x$  方向の幅の中心を  $x$  の原点とすると、 $f(x)$  は

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \left(x < -\frac{d}{2}\right) \\ 1 & \left(-\frac{d}{2} \leq x \leq \frac{d}{2}\right) \\ 0 & \left(\frac{d}{2} < x\right) \end{cases}$$

となる。

$D(\theta)$  は

$$D(\theta) = 2\pi \left| F\left(-\frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta\right) \right|^2$$

であるから、 $F(k)$  を求めれば結論を得られる。

問題 11 の結果を使うと

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2}{k} \sin \left[ \frac{d}{2} k \right]$$

である。

これより

$$\begin{aligned} D(\theta) &= 2\pi \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left(-\frac{\lambda}{\pi \sin \theta}\right) \sin \left[ -\frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta \right] \right|^2 \\ &= 2\pi \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\lambda}{\pi \sin \theta} \sin \left[ \frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta \right] \right|^2 \\ &= \left( \frac{\lambda}{\pi} \cdot \frac{\sin \left[ \frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta \right]}{\sin \theta} \right)^2 \end{aligned}$$

を得る。

$\lambda = 5.0 \times 10^{-7} \text{ m}$ 、 $d = 2.5 \times 10^{-6} \text{ m}$  を代入した  $D(\theta)$  のグラフを図 23 に示す。

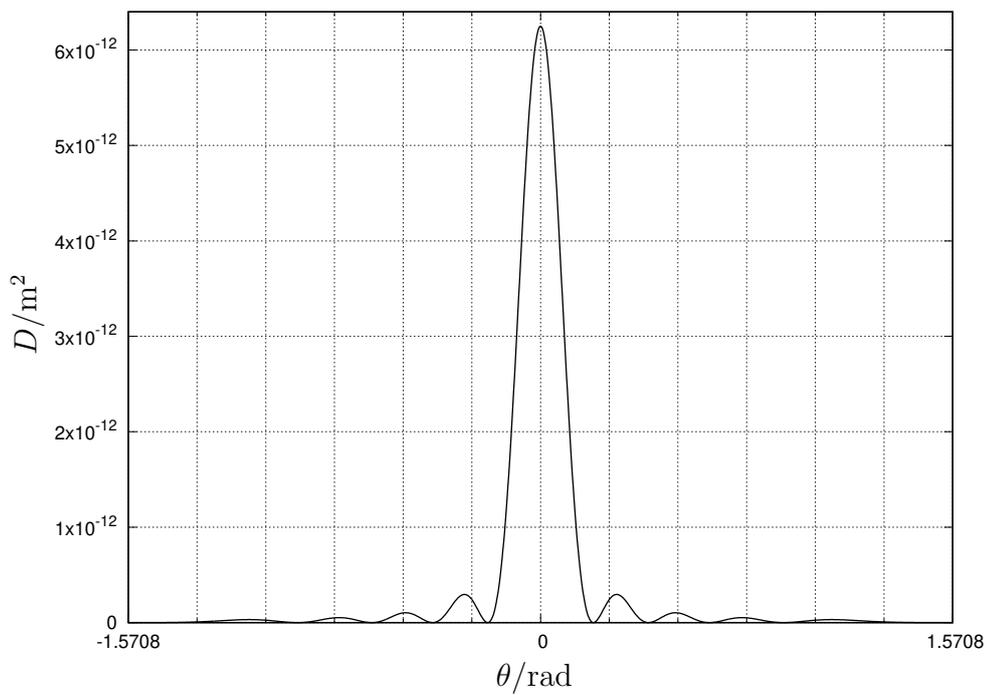
図 23 から、「単スリットによる干渉縞」が生じることがわかる。

$\lambda = 5.0 \times 10^{-7} \text{ m}$  とし、 $d$  の値を変化させて干渉縞の変化を調べたのが図 24 である。4 つのグラフは、それぞれ、 $d$  が  $\lambda$  の 5 倍、2 倍、1 倍、 $\frac{1}{2}$  倍 の場合のものである。

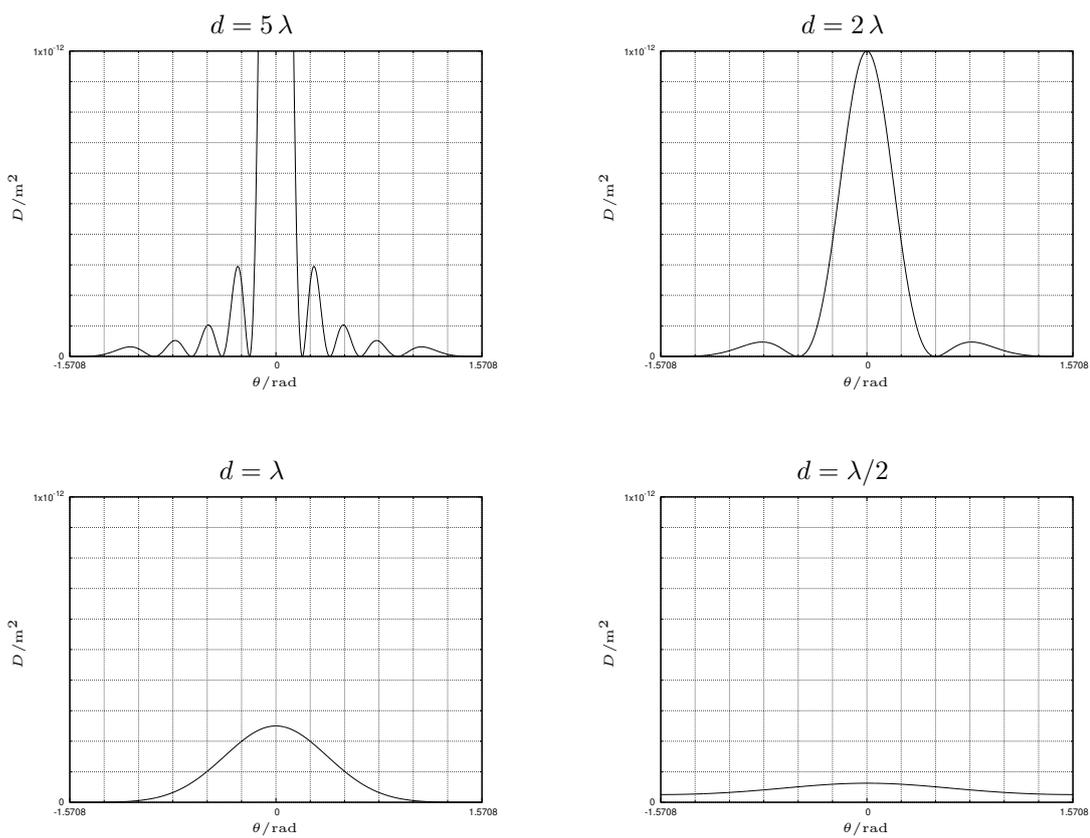
図 24 から、次のようなことがわかる。

まず、 $d = 5\lambda$  と  $d = 2\lambda$  では、0 次 の明線にエネルギーのほとんどが集中しており、その広がり、より広い  $d = 2\lambda$  の場合で  $|\theta| \leq \frac{\pi}{6}$  の範囲である。いっぽう、 $d = \lambda$  と  $d = \frac{1}{2}\lambda$  では、1 次 以上の明線が存在せず、0 次 の明線が  $\theta$  のすべての範囲に広がっている。さらに詳しく見れば、 $d = \lambda$  では 0 次 の明線の中でも  $\theta = 0$  の近くにエネルギーが多く分布するが、 $d = \frac{1}{2}\lambda$  では  $\theta$  のすべての範囲にわたってフラットに近いエネルギー分布になっている。これらのことは、細いスリットを通過した光は、スリット幅が光の波長に比べて大きければあまり広がらず、小さければ大きく広がることを意味している。

しかも、 $d = \frac{1}{2}\lambda$  のグラフは、ピークの高さがとても低い。このことは、スリット幅が波長に比べて小さい場合には、スリットを通過すると、光のエネルギーが空間全体に散逸してしまうため、ビームとしての光は消滅してしまうことを意味する。平易な表現を使えば、「光は波長より小さいスリットを通り抜けられない」のである。



☒ 23



☒ 24

## 問題 17

時刻を  $t$  とする。

1次元空間を伝わる波動関数を考える。空間座標を  $x$  とする。

時刻  $t = 0$  における波動関数  $\psi(x)$  が

$$\psi(x) = A \exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right]$$

( $\sigma$  は正の実数の定数) で表される粒子がある。

$t = 0$  においてこの粒子が座標  $x$  から  $x + dx$  までの範囲に存在すると観測される確率  $P(x) dx$  は、 $|\psi(x)|^2 dx$  に等しい。

1.  $t = 0$  において、粒子が全空間のどこかに存在すること、すなわち、粒子が座標  $-\infty$  から  $\infty$  までの範囲に存在すると観測される確率が 1であることを考慮して、 $A$  を定めよ。ただし、 $A$  は正の実数とする。

Gauss 積分の公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-x^2] dx = \sqrt{\pi}$$

が利用できる。

2.  $t = 0$  において観測される粒子の座標の期待値  $E[x]$  を求めよ。
3.  $t = 0$  において観測される粒子の座標の標準偏差  $V[x]$  を求めよ。
4.  $\psi(x)$  の Fourier 変換を  $\Psi(k)$  とする。  $\Psi(k)$  を求めよ。

運動量  $p$  で運動する粒子は波数  $k$  の波であり、 $p$  と  $k$  の間に

$$p = \hbar k$$

( $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ 、 $h$  はプランク定数) が成り立つ。

そして、 $t = 0$  において粒子の波数が  $k$  から  $k + dk$  までの範囲にあると観測される確率  $Q(k) dk$  は、 $|\Psi(k)|^2 dk$  に等しい。

5.  $t = 0$  において観測される粒子の運動量の期待値  $E[p]$  を求めよ。
6.  $t = 0$  において観測される粒子の運動量の標準偏差  $V[p]$  を求めよ。

$V[x]$  は、 $x$  の「ばらつき」あるいは「ゆらぎ」の程度を表す量である。具体的には、 $E[x]$  を中心とする、68.3%の確率で観測される  $x$  の範囲の半幅である。量子力学では、 $V[x]$  を  $x$  の不確定性と呼び、 $\Delta x$  で表す。

$V[p]$  は、 $p$  の「ばらつき」あるいは「ゆらぎ」の程度を表す量である。具体的には、 $E[p]$  を中心とする、68.3%の確率で観測される  $p$  の範囲の半幅である。量子力学では、 $V[p]$  を  $p$  の不確定性と呼び、 $\Delta p$  で表す。

7.  $\Delta x$  と  $\Delta p$  の積を求めよ。

## 問題 17 の答

Fourier 変換を表す演算子を  $\mathcal{F}[\dots]$  とする。

1. 粒子が座標  $-\infty$  から  $\infty$  までの範囲に観測される確率は、あらゆる  $x$  に対する  $P(x) dx$  の総和に等しい。よって

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} P(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( A \exp \left[ -\frac{x^2}{2\sigma^2} \right] \right)^2 dx \\ &= A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ -\frac{x^2}{\sigma^2} \right] dx \end{aligned}$$

$x' = \frac{x}{\sigma}$  と変数変換すると

$$\begin{aligned} &= A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-x'^2] \cdot \sigma dx' \\ &= \sigma A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-x'^2] dx' \\ &= \sigma A^2 \cdot \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

を得る。

これより

$$A = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi} \sigma}}$$

と定められる。

- 2.

$$\begin{aligned} E[x] &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot P(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot |\psi(x)|^2 dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi} \sigma}} \exp \left[ -\frac{x^2}{2\sigma^2} \right] \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi} \sigma} \int_{-\infty}^{\infty} x \exp \left[ -\frac{x^2}{\sigma^2} \right] dx \end{aligned}$$

$x' = \frac{x}{\sigma}$  と変数変換すると

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{\pi} \sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma x' \exp[-x'^2] \cdot \sigma dx' \\ &= \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x' \exp[-x'^2] dx' \\ &= \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}} \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) \left[ \exp[-x'^2] \right]_{-\infty}^{\infty} \\ &= 0 \end{aligned}$$

を得る。

3.

$$\begin{aligned}
V[x] &= \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (x - E[x])^2 \cdot P(x) dx} \\
&= \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot P(x) dx} \\
&= \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot |\psi(x)|^2 dx} \\
&= \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}} \sigma} \exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right] \right)^2 dx} \\
&= \sqrt{\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sigma \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp\left[-\frac{x^2}{\sigma^2}\right] dx}
\end{aligned}$$

$x' = \frac{x}{\sigma}$  と変数変換すると

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sigma \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^2 x'^2 \exp[-x'^2] \cdot \sigma dx'} \\
&= \sqrt{\frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x'^2 \exp[-x'^2] dx'} \\
&= \sigma \sqrt{\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \left( \left[ x' \exp[-x'^2] \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-x'^2] dx' \right)} \\
&= \sigma \sqrt{-\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left( 0 - \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-x'^2] dx' \right)} \\
&= \sigma \sqrt{\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-x'^2] dx'} \\
&= \sigma \sqrt{\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\pi}} \\
&= \frac{\sigma}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

を得る。

4. 問題 11 の結論を使う。

$$\begin{aligned}
\Psi(k) &= \mathcal{F}[\psi(x)] \\
&= \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}} \sigma} \mathcal{F}\left[\exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right]\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}} \sigma} \cdot \sigma \exp\left[-\frac{\sigma^2}{2} k^2\right] \\
&= \sqrt{\frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}} \exp\left[-\frac{\sigma^2}{2} k^2\right]
\end{aligned}$$

である。

5. 粒子の運動量が  $p$  から  $p + dp$  までの範囲であると観測される確率を  $R(p) dp$  とすれば

$$E[p] = \int_{-\infty}^{\infty} p \cdot R(p) dp$$

である。

粒子の運動量が  $p$  から  $p + dp$  までの範囲は、粒子の波数が  $\frac{p}{\hbar}$  から  $\frac{p}{\hbar} + \frac{1}{\hbar} dp$  までの範囲であるから

$$\begin{aligned} R(p) dp &= Q\left(\frac{p}{\hbar}\right) \cdot \frac{1}{\hbar} dp \\ &= \left| \Psi\left(\frac{p}{\hbar}\right) \right|^2 \cdot \frac{1}{\hbar} dp \\ &= \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{\sigma^2}{\hbar^2} p^2\right] \cdot \frac{1}{\hbar} dp \\ &= \frac{\sigma}{\sqrt{\pi} \hbar} \exp\left[-\frac{\sigma^2}{\hbar^2} p^2\right] dp \end{aligned}$$

である。

ゆえに

$$\begin{aligned} E[p] &= \int_{-\infty}^{\infty} p \cdot \left( \frac{\sigma}{\sqrt{\pi} \hbar} \exp\left[-\frac{\sigma^2}{\hbar^2} p^2\right] \right) dp \\ &= \frac{\sigma}{\sqrt{\pi} \hbar} \int_{-\infty}^{\infty} p \exp\left[-\frac{\sigma^2}{\hbar^2} p^2\right] dp \end{aligned}$$

$p' = \frac{\sigma}{\hbar} p$  と変数変換すると

$$\begin{aligned} &= \frac{\sigma}{\sqrt{\pi} \hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hbar}{\sigma} p' \exp[-p'^2] \cdot \frac{\hbar}{\sigma} dp' \\ &= \frac{\hbar}{\sqrt{\pi} \sigma} \int_{-\infty}^{\infty} p' \exp[-p'^2] dp' \\ &= \frac{\hbar}{\sqrt{\pi} \sigma} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \left[ \exp[-p'^2] \right]_{-\infty}^{\infty} \\ &= 0 \end{aligned}$$

を得る。

6.

$$\begin{aligned}
V[p] &= \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (p - E[p])^2 \cdot R(p) dp} \\
&= \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} p^2 \cdot R(p) dp} \\
&= \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} p^2 \cdot \left( \frac{\sigma}{\sqrt{\pi} \hbar} \exp \left[ -\frac{\sigma^2}{\hbar^2} p^2 \right] \right) dp} \\
&= \sqrt{\frac{\sigma}{\sqrt{\pi} \hbar} \int_{-\infty}^{\infty} p^2 \exp \left[ -\frac{\sigma^2}{\hbar^2} p^2 \right] dp}
\end{aligned}$$

$p' = \frac{\sigma}{\hbar} p$  と変数変換すると

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{\sigma}{\sqrt{\pi} \hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hbar^2}{\sigma^2} p'^2 \exp \left[ -p'^2 \right] \cdot \frac{\hbar}{\sigma} dp'} \\
&= \sqrt{\frac{\hbar^2}{\sqrt{\pi} \sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} p'^2 \exp \left[ -p'^2 \right] dp'} \\
&= \frac{\hbar}{\sigma} \sqrt{\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) \left( \left[ p' \exp \left[ -p'^2 \right] \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ -p'^2 \right] dp' \right)} \\
&= \frac{\hbar}{\sigma} \sqrt{-\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left( 0 - \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ -p'^2 \right] dp' \right)} \\
&= \frac{\hbar}{\sigma} \sqrt{\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ -p'^2 \right] dp'} \\
&= \frac{\hbar}{\sigma} \sqrt{\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\pi}} \\
&= \frac{\hbar}{\sqrt{2} \sigma}
\end{aligned}$$

を得る。

7.  $\Delta x$  は

$$\begin{aligned}\Delta x &= V[x] \\ &= \frac{\sigma}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

であり、 $\Delta p$  は

$$\begin{aligned}\Delta p &= V[p] \\ &= \frac{\hbar}{\sqrt{2}\sigma}\end{aligned}$$

である。

よって

$$\begin{aligned}\Delta x \cdot \Delta p &= \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\hbar}{\sqrt{2}\sigma} \\ &= \frac{\hbar}{2}\end{aligned}$$

であるとわかる。

$\Delta x$  と  $\Delta p$  の積が一定であるという結論が得られた。この結論は、粒子の運動の状態を測定しようとするとき、測定の条件や方法を工夫して、位置の「ばらつき」「ゆらぎ」を小さくすると運動量の「ばらつき」「ゆらぎ」が大きくなり、運動量の「ばらつき」「ゆらぎ」を小さくすると位置の「ばらつき」「ゆらぎ」が大きくなることを意味する。つまり、位置と運動量の両方を一定以上の高い精度で測定することは、不可能ということである。

量子力学では、粒子の波動関数がどのようなものであろうと、必ず

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

が成り立つことが導かれる。これは、**不確定性原理**と呼ばれ、量子力学の重要な原理の一つである。

この問題の考察からわかるように、不確定性原理が成り立つ本質的な要因は、粒子が持つ波動性、つまり、二重性にある。